深圳中考数学压轴20题

深圳学而思培优教研部　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

深圳中考数学压轴20题/深圳学而思培优教研部编著.—北京：电子工业出版社，2014.3
ISBN 978-7-121-22170-5

Ⅰ.①深… Ⅱ.①深… Ⅲ.①中学数学课－初中－习题集－升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第302632号

策划编辑：邓 艳
责任编辑：邓 艳
印 刷：
装 订：
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036
开 本：787×1 092 1/16 印张：5.5 字数：151千字
印 次：2014年3月第1次印刷
定 价：16.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

深圳学而思图书策划委员会

主　　编	张明颂
副 主 编	胡　健　刘　伟　龙海涛
执行主编	朱　武
编　　著	深圳学而思培优教研部
	郑　魁　叶嘉俊　何　山
	于　楠　魏　明　周卫东
丛书设计	王　栓
鸣　　谢	李光虎　舒　磊　张楚雄
	熊　娟　施泽平　黄平平
	林晓佳　张　健　余坤锴

前　　言

把学习数学变得容易一些，这是我们一直思考的问题和研究方向。我们反对机械记忆、题海战术；我们提倡钻透一道题，学会一类题；我们秉承着“品格第一，兴趣第二，升学第三”的教育理念，让孩子能全面地发展，挖掘出无限的潜力。

深圳中考数学，题目相对容易，很多同学的分数都比较高，所以区分度很大程度上取决于最后的压轴题。我们在学好基础题的同时应该花更多精力攻克压轴题，从而使自己最终能站在中考数学的前列。

本书以最新课改精神为依据，以现行初中数学教材为蓝本，科学定位编写内容，具有针对性、代表性和全面性；在解题方面，注重一题多解、变通分析、总结规律，帮助你跳出题海，举一反三，触类旁通。

“宝剑锋从磨砺出，梅花香自苦寒来。”希望同学们通过自身的努力，不断奋进，愿本书能助你顺利通过中考大关。

深圳学而思培优教研部

目　录

第一章　函数中的静态计算

1.1 函数与三角形

【例 1】如图 1-1-1 所示，已知在同一平面直角坐标系中，直线 $y=kx+2-\frac{k}{2}$ 与 y 轴交于点 P，抛物线 $y=x^2-2(k+1)x+4k$ 与 x 轴交于 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$ 两点，C 是抛物线的顶点.

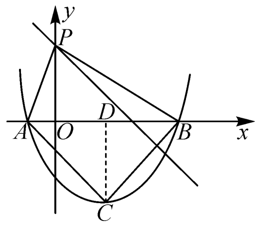


图 1-1-1

(1)求二次函数的最小值(用含 k 的代数式表示)；

(2)若点 A 在点 B 的左侧，且 $x_1\cdot x_2<0$.

①当 k 取何值时，直线通过点 B；

②是否存在实数 k，使 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC}$？如果存在，请求出此时抛物线的解析式；如果不存在，请说明理由.

突破分析

(1)通过配方将抛物线解析式 $y=x^2-2(k+1)x+4k$ 化成 $y=[x-(k+1)]^2-(k-1)^2$ 即可.

(2)①直线通过点 B，即直线与抛物线有一个交点是在点 B，只需联立直线和抛物线解析式再结合点 B 在 x 轴上，令 $y=0$ 即可.

②由题意得，$\triangle ABP$ 和 $\triangle ABC$ 同底，若面积相等，则只需高相等，即 $|y|=OP$，求出此时 k 值即可.

解析

(1)$y_{最小值}=-(k-1)^2$.

(2)①$y=x^2-2(k+1)x+4k=(x-2k)(x-2)$. 将 $(2k,0)$ 代入直线，无解，将 $(2,0)$ 代入直线，解得当 $k=-\frac{4}{3}$ 时，直线过点 B；

②过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，则 $CD=\left|-(k-1)^2\right|=(k-1)^2$，把 $x=0$ 代入直线 $y=kx+2-\frac{k}{2}$，得 $y=2-\frac{k}{2}$，

$\therefore OP=\left|2-\frac{k}{2}\right|$.

$\because x_1x_2=4k<0$，

$\therefore k<0, 2-\frac{k}{2}>0$,

$\therefore OP=2-\frac{k}{2}$.

若 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC}$,即 $\frac{1}{2}AB\cdot OP=\frac{1}{2}AB\cdot CD$,

$\because AB>0$,

$\therefore OP=CD$,即 $2-\frac{k}{2}=(k-1)^2$.

解得 $k_1=-\frac{1}{2}, k_2=2$.

$\because k<0$,

$\therefore$ 取 $k=-\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 当 $k=-\frac{1}{2}$ 时,$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC}$.

此时所求的抛物线的解析式为:$y=x^2-x-2$.

从以上解答中可以看出三角形面积相等作为已知条件的作用是利用三角形的面积公式,再利用同底等高的性质推出线段相等,仅此而已.

大显身手

【习题 1】如图 1-1-2 所示，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2-6$ 与直线 $y=\frac{1}{2}x$ 相交于 A、B 两点.

(1)求线段 AB 的长.

(2)若一个扇形的周长等于(1)中线段 AB 的长，当扇形的半径取何值时，扇形的面积最大，最大面积是多少？

(3)如图 1-1-3 所示，线段 AB 的垂直平分线分别交 x 轴、y 轴于 C，D 两点，垂足为点 M，分别求出 OM，OC，OD 的长，并验证等式 $\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OD^2}=\frac{1}{OM^2}$ 是否成立.

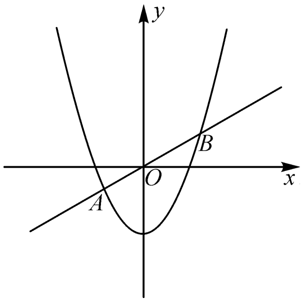


图 1-1-2

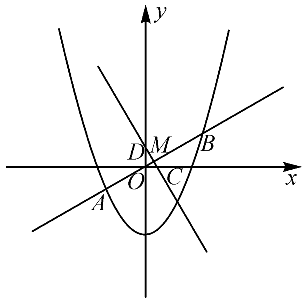


图 1-1-3

(4)如图 1-1-4 所示，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为 D，设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$CD=h$，试说明：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$.

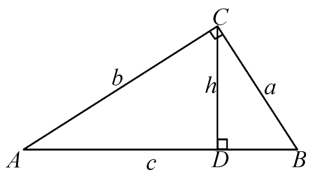


图 1-1-4

1.2 函数与四边形

【例 2】(2011 永州)如图 1-2-1 所示,已知二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图像经过$A(-2,-1)$,$B(0,7)$两点.

(1)求该抛物线的解析式及对称轴;

(2)当 x 为何值时,$y>0$?

(3)在 x 轴上方作平行于 x 轴的直线 l,与抛物线交于 C,D 两点(点 C 在对称轴的左侧),过点 C,D 作 x 轴的垂线,垂足分别为 F,E. 当矩形 $CDEF$ 为正方形时,求点 C 的坐标.

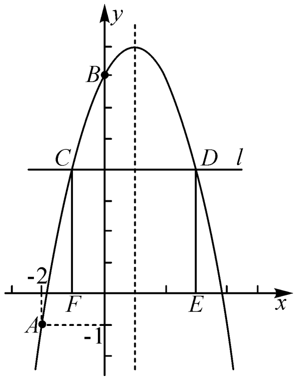


图 1-2-1

突破分析

(1)首先利用待定系数法,将 A、B 两点坐标代入 $y=-x^2+bx+c$ 后得抛物线解析式,然后可得对称轴.

(2)令抛物线 $y=-x^2+2x+7=0$,可得抛物线与 x 轴两交点坐标,结合图像可得 x 在两点之间时,$y>0$.

(3)若四边形 $CDEF$ 是正方形,则 $CF=CD$,设 $C(m,-m^2+2m+7)$,则可用 m 表示出线段 CF、CD,由 $CF=CD$ 可得到关于 m 的一元二次方程,求解即可.

解析

(1)把 $A(-2,-1)$,$B(0,7)$两点的坐标代入 $y=-x^2+bx+c$,得$\begin{cases}-4-2b+c=-1,\\c=7.\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=2,\\c=7.\end{cases}$

∴该抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+7$.

又∵$y=-x^2+2x+7=-(x+1)^2+8$,

∴对称轴为直线 $x=1$.

(2)当函数值 $y=0$ 时,$-x^2+2x+7=0$ 的解为 $x=1\pm2\sqrt{2}$,

结合图像,容易知道 $1-2\sqrt{2}<x<1+2\sqrt{2}$时,$y>0$.

(3)当矩形 $CDEF$ 为正方形时,设点 C 的坐标为(m,n),

则 $n=-m^2+2m+7$,即 $CF=-m^2+2m+7$.

∵C,D 两点的纵坐标相等,

∴C,D 两点关于对称轴 $x=1$ 对称,设点 D 的横坐标为 p,则 $1-m=p-1$,

∴$p=2-m$,

∴$CD=(2-m)-m=2-2m$.

∵$CD=CF$,

$\therefore 2-2m=-m^2+2m+7$,整理,得 $m^2-4m-5=0$,解得 $m=-1$ 或 5.

$\because$ 点 C 在对称轴的左侧,

$\therefore m$ 只能取 -1.

当 $m=-1$ 时,$n=-m^2+2m+7=-(-1)^2+2\times(-1)+7=4$.

于是,得点 C 的坐标为 $(-1,4)$.

大显身手

【习题 2】如图 1-2-2 所示,抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-x+a$ 与 x 轴交于 A,B 两点,与 y 轴交于点 C,其顶点在直线 $y=-2x$ 上.

(1)求 a 的值;

(2)求 A,B 两点的坐标;

(3)以 AC,CB 为一组邻边作平行四边形 $ACBD$,则点 D 关于 x 轴的对称点 D' 是否在该抛物线上?请说明理由.

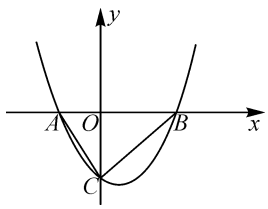


图 1-2-2

1.3 函数与圆

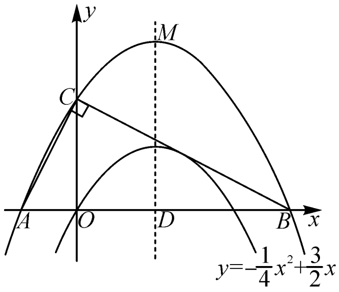


图 1-3-1

【例 3】已知二次函数 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$ 的图像如图 1-3-1 所示.

(1)求它的对称轴与 x 轴交点 D 的坐标;

(2)将该抛物线沿它的对称轴向上平移,设平移后的抛物线与 x 轴,y 轴的交点分别为 A、B、C 三点,若 $\angle ACB=90°$,求此时抛物线的解析式;

(3)设(2)中平移后的抛物线的顶点为 M,以 AB 为直径,D 为圆心作⊙D,试判断直线 CM 与⊙D 的位置关系,并说明理由.

突破分析

(2)此问考查:①抛物线的平移,可看成两种,一是函数本身的平移,二是顶点的平移;②考查由 AC 与 BC 垂直,可从射影定理及勾股定理入手解答即可.

(3)由题意可知 C 点在⊙D 上,故只需判断 DC 与 CM 是否垂直即可.

解析

(1)由 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$ 得 $x=-\frac{b}{2a}=3$,

$\therefore D(3,0)$.

(2)方法一:

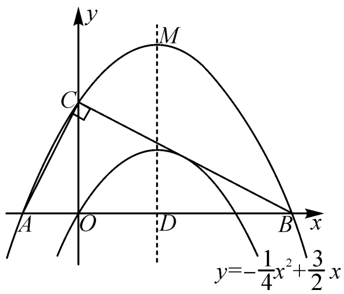


图 1-3-2

如图 1-3-2 所示,设平移后的抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+k$,

则 $C(0,k)$,$OC=k$,令 $y=0$,即 $-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+k=0$.

得 $x_1=3+\sqrt{4k+9}$,$x_2=3-\sqrt{4k+9}$.

$\therefore A(3-\sqrt{4k+9},0)$,$B(3+\sqrt{4k+9},0)$,

$\therefore AB^2=(\sqrt{4k+9}+3-3+\sqrt{4k+9})^2=16k+36$.

$AC^2+BC^2=k^2+(3-\sqrt{4k+9})^2+k^2+(3+\sqrt{4k+9})^2=2k^2+8k+36$

$\because AC^2+BC^2=AB^2$,

即:$2k^2+8k+36=16k+36$,得 $k_1=4$,$k_2=0$(舍去),

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4$.

方法二：

$\because y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$，

$\therefore$ 顶点坐标 $\left(3,\frac{9}{4}\right)$.

设抛物线向上平移 h 个单位，则得到 $C(0,h)$，顶点坐标 $M\left(3,\frac{9}{4}+h\right)$，

$\therefore$ 平移后的抛物线：$y=-\frac{1}{4}(x-3)^2+\frac{9}{4}+h$.

当 $y=0$ 时，$-\frac{1}{4}(x-3)^2+\frac{9}{4}+h=0$，得 $x_1=3-\sqrt{4h+9}$，$x_2=3+\sqrt{4h+9}$，

$\therefore A(3-\sqrt{4h+9},0)$，$B(3+\sqrt{4h+9},0)$.

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \triangle AOC \backsim \triangle COB$.

$\therefore OC^2=OA\cdot OB$，

$h^2=(\sqrt{4h+9}-3)(\sqrt{4h+9}+3)$ 得 $h_1=4$，$h_2=0$（舍去）.

$\therefore$ 平移后的抛物线：$y=-\frac{1}{4}(x-3)^2+\frac{9}{4}+4=-\frac{1}{4}(x-3)^2+\frac{25}{4}$.

(3)方法一：

如图 1-3-3 所示，由抛物线的解析式 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4$

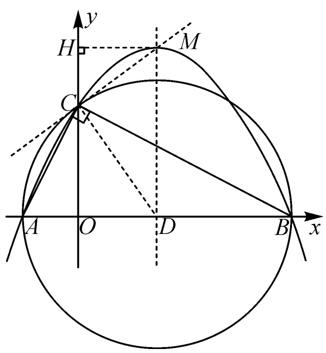


图 1-3-3

可得：$A(-2,0)$，$B(8,0)$，$C(4,0)$，$M\left(3,\frac{25}{4}\right)$.

过 C、M 作直线，连接 CD，过 M 作 MH 垂直 y 轴于 H，则 $MH=3$.

在 Rt$\triangle COD$ 中，$CD=\sqrt{3^2+4^2}=5=AD$，

$\therefore$ 点 C 在$\odot D$ 上.

$\because DM^2=\left(\frac{25}{4}\right)^2=\frac{625}{16}$，

$CD^2+CM^2=5^2+\frac{225}{16}=\left(\frac{25}{4}\right)^2=\frac{625}{16}$，

$\therefore DM^2=CM^2+CD^2$.

$\therefore \triangle CDM$ 是直角三角形，

$\therefore CD\perp CM$，

$\therefore$ 直线 CM 与$\odot D$ 相切.

方法二：

如图 1-3-4 所示，由抛物线的解析式可得

$A(-2,0)$，$B(8,0)$，$C(4,0)$，$M\left(3,\dfrac{25}{4}\right)$.

作直线 CM，过 D 作 $DE\perp CM$ 于 E，过 M 作 MH 垂直 y 轴于 H，则 $MH=3$，$DM=\dfrac{25}{4}$由勾股定理得 $CM=\dfrac{15}{4}$.

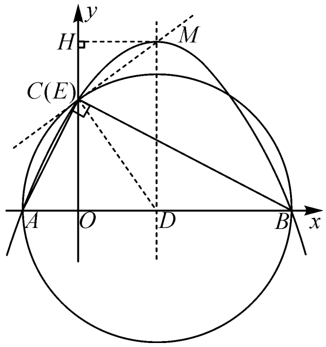


图 1-3-4

$\because DM /\!/ OC$，

$\therefore \angle MCH=\angle EMD$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle CMH\backsim \mathrm{Rt}\triangle DME$，

$\therefore \dfrac{DE}{MH}=\dfrac{MD}{CM}$得 $DE=5$.

由(2)知 $AB=10$，$\therefore \odot D$ 的半径为 5，

$\therefore$直线 CM 与$\odot D$ 相切.

方法三：

易证$\triangle CMH\backsim\triangle DCO$.

$\therefore \angle MCH+\angle DCO=90^\circ$

$\therefore \angle MCD=90^\circ$，即 $MC\perp OD$.

$\therefore CM$ 与$\odot D$ 相切.

大显身手

【习题 3】已知：抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，顶点 $C(1,-3)$，与 x 轴交于 A、B 两点，$A(-1,0)$.

(1)求这条抛物线的解析式.

(2)如图 1-3-5 所示，以 AB 为直径作圆，与抛物线交于点 D，与抛物线对称轴交于点 E，依次连接 A、D、B、E，点 P 为线段 AB 上一个动点(P 与 A、B 两点不重合)，过点 P 作 $PM\perp AE$ 于 M，$PN\perp DB$ 于 N，请判断 $\dfrac{PM}{BE}+\dfrac{PN}{AD}$ 是否为定值？若是，请求出此定值；若不是，请说明理由.

(3)如图 1-3-6 所示，在(2)的条件下，若点 S 是线段 EP 上一点，过点 S 作 $FG\perp EP$，FG 分别与边 AE、BE 相交于点 F，G(F 与 A、E 不重合，G 与 E、B 不重合)，请判断 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{EF}{EG}$ 是否成立.若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由.

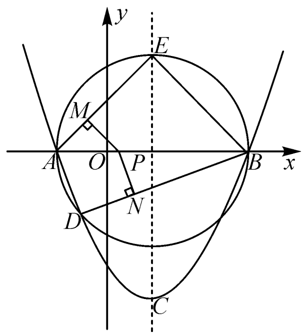


图 1-3-5

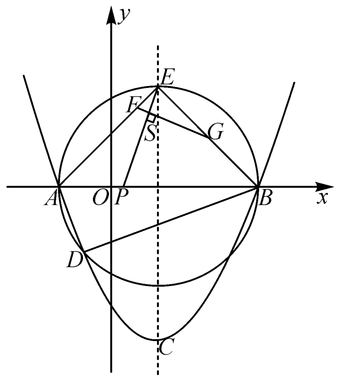


图 1-3-6

1.4 不定函数

【例 4】如图 1-4-1 所示，已知关于 x 的二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像经过点 $C(0,1)$，且与 x 轴交于不同的两点 A、B，点 A 的坐标是$(1,0)$.

(1)求 c 的值；

(2)求 a 的取值范围；

(3)该二次函数的图像与直线 $y=1$ 交于 C、D 两点，设 A、B、C、D 四点构成的四边形的对角线相交于点 P，记△PCD 的面积为 S_1，△PAB 的面积为 S_2，当 $0<a<1$ 时，求证：S_1-S_2 为常数，并求出该常数.

突破分析

(1)由 C 点的几何意义直接可得 $c=1$.

(2)由抛物线与 x 轴有两个交点，得 $\Delta>0$，再结合 a,b,c 之间的关系解答即可.

(3)考查蝴蝶模型，S_1-S_2 直接计算很麻烦，可在上面加上△APC 的面积，把两者面积变化为高相等的三角形，再结合四边形 $ABDC$ 也是等腰梯形，可得 $CD-AB$ 等于 OA 的两倍.

解析

(1)将点 $C(0,1)$代入 $y=ax^2+bx+c$ 得 $c=1$.

(2)由(1)知 $y=ax^2+bx+1$，将点 $A(1,0)$代入得 $a+b+1=0$，

$\therefore b=-(a+1)$.

$\therefore$二次函数为 $y=ax^2-(a+1)x+1$.

$\because$二次函数为 $y=ax^2-(a+1)x+1$ 的图像与 x 轴交于不同的两点，

$\therefore\Delta>0$，而 $\Delta=[-(a+1)]^2-4a=a^2+2a+1-4a=a^2-2a+1=(a-1)^2$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $a>0$ 且 $a\neq1$.

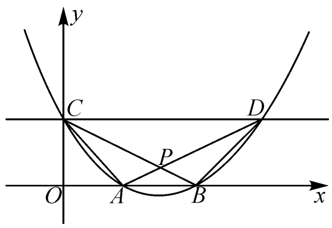


图 1-4-1

(3)证明：$\because 0<a<1$，

$\therefore$对称轴为 $x=-\dfrac{-a-1}{2a}=\dfrac{a+1}{2a}>1$，

$\therefore AB=2\left(\dfrac{a+1}{2a}-1\right)=\dfrac{1-a}{a}$.

把 $y=1$ 代入 $y=ax^2-(a+1)x+1$ 得 $ax^2-(a+1)x=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{1+a}{a}$，

$\therefore CD=\dfrac{1+a}{a}$.

$\therefore S_1-S_2=S_{\triangle PCD}-S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ACD}-S_{\triangle CAB}$

$=\frac{1}{2}\times CD\cdot OC-\frac{1}{2}\times AB\cdot OC$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1+a}{a}\times 1-\frac{1}{2}\times\frac{1-a}{a}\times 1=1$，

$\therefore S_1-S_2$ 为常数，这个常数为 1.

大显身手

【习题 4】如图 1-4-2 所示，已知抛物线的顶点是 $C(0,a)(a>0,a$ 为常数)，并经过点$(2a,2a)$，点 $D(0,2a)$为一定点.

(1)求含有常数 a 的抛物线的解析式；

(2)设点 P 是抛物线上任意一点，过 P 作 $PH\perp x$ 轴，垂足是 H，求证：$PD=PH$；

(3)设过原点 O 的直线 l 与抛物线在第一象限相交于 A、B 两点，若 $DA=2DB$，且 $S_{\triangle ABD}=4\sqrt{2}$，求 a 的值.

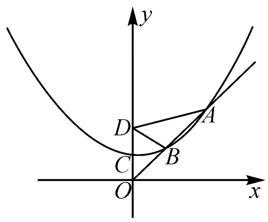


图 1-4-2

【习题 5】如图 1-4-3 所示，y 关于 x 的二次函数 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3m}(x+m)(x-3m)$ 图像的顶点为 M，图像交 x 轴于 A、B 两点，交 y 轴正半轴于点 D. 以 AB 为直径做圆，圆心为 C，定点 E 的坐标为 $(-3,0)$，连接 ED.（$m>0$）

(1)写出 A、B、D 三点的坐标；

(2)当 m 为何值时 M 点在直线 ED 上？判定此时直线 ED 与圆的位置关系；

(3)当 m 变化时，用 m 表示△AED的面积 S，并在给出的直角坐标系中画出 S 关于 m 的函数图像的示意图.

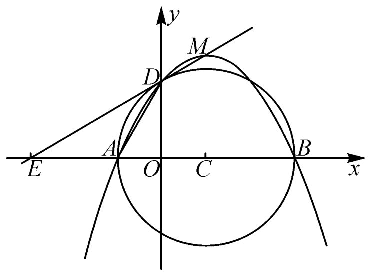


图 1-4-3

第二章　函数中的点动问题

2.1 动点形成的相似三角形

【例 5】如图 2-1-1 所示，已知抛物线过点 $A(0,6)$，$B(2,0)$，$C\left(7,\frac{5}{2}\right)$.

(1)求抛物线的解析式；

(2)若 D 是抛物线的顶点，E 是抛物线的对称轴与直线 AC 的交点，F 与 E 关于 D 对称，求证：$\angle CFE=\angle AFE$；

(3)在 y 轴上是否存在这样的点 P，使$\triangle AFP$ 与$\triangle FDC$ 相似？若有，请求出所有符合条件的点 P 的坐标；若没有，请说明理由.

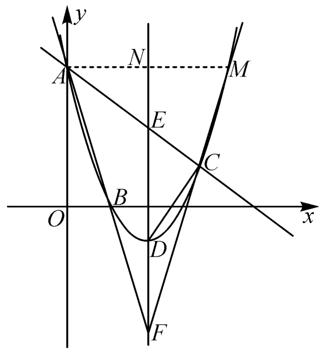


图 2-1-1

突破分析

(1)运用待定系数法求解即可.

(2)在坐标系中，看到角平分线，比较常用的方法有角平分线定理及三角函数，但三角函数会有局限性，一般多在角平分线为特殊直线时用，此题即可用三角函数求解.

(3)考查相似三角形的分类讨论，而讨论的突破口依次有如下：公共角(或明显的等角)，特殊角，边来选择.

解析

(1)抛物线经过点 $A(0,6)$，$B(2,0)$，$C\left(7,\frac{5}{2}\right)$的抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$，

则：$\begin{cases} c=6, \\ 4a+2b+c=0, \\ 49a+7b+c=\frac{5}{2}. \end{cases}$

解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=-4$，$c=6$.

∴此抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+6$.

(2)方法一：

过点 A 作 $AM\parallel x$ 轴，交 FC 于点 M，交对称轴于点 N.

∵抛物线的解析式 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+6$ 可变形为 $y=\frac{1}{2}(x-4)^2-2$，

∴抛物线对称轴是直线 $x=4$，顶点 D 的坐标为 $(4,-2)$，则 $AN=4$.

设直线 AC 的解析式为 $y=k_1x+b_1$，

则有 $\begin{cases} b_1=6, \\ 7k_1+b_1=\frac{5}{2}. \end{cases}$ 解得 $k_1=-\frac{1}{2}$，$b_1=6$.

∴直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+6$.

当 $x=4$ 时，$y=-\frac{1}{2}\times 4+6=4$.

∴点 E 的坐标为 $(4,4)$，∵点 F 与 E 关于点 D 对称，则点 F 的坐标为 $(4,-8)$.

设直线 FC 的解析式为 $y=k_2x+b_2$，

则有 $\begin{cases} 4k_2+b_2=-8, \\ 7k_2+b_2=\frac{5}{2}. \end{cases}$ 解得 $k_2=\frac{7}{2}$，$b_2=-22$.

∴直线 AC 的解析式为 $y=\frac{7}{2}x-22$.

∵AM 与 x 轴平行，则点 M 的纵坐标为 6.

当 $y=6$ 时，则有 $\frac{7}{2}x-22=6$，解得 $x=8$.

∴$AM=8$，$MN=AM-MN=4$，∴$AN=MN$.

∵$FN\perp AM$，∴$\angle ANF=\angle MNF$.

又 $NF=NF$，∴$\triangle ANF\cong\triangle MNF$，∴$\angle CFE=\angle AFE$.

方法二：

在方法一种很容易求出抛物线对称轴是直线 $x=4$，顶点 D 的坐标为 $(4,-2)$，点 E 的坐标为 $(4,4)$，点 F 的坐标为 $(4,-8)$，∴很容易求出 $\tan\angle AFN=\frac{AN}{FN}=\frac{2}{7}$. 同理用点 C 的坐标求出 $\tan\angle CFE=\frac{2}{7}$.

(3)∵C 的坐标为 $\left(7,\frac{5}{2}\right)$，$F$ 坐标为 $(4,-8)$，

∴$CF=\sqrt{\left(\frac{5}{2}+8\right)^2+(7-4)^2}=\frac{3\sqrt{53}}{2}$.

∵又 A 的坐标为 $(0,6)$，则 $FA=\sqrt{(6+8)^2+4^2}=2\sqrt{53}$，

又 $DF=6$，

若 $\triangle AFP\backsim\triangle FCD$，

$\because EF /\!/ AO$，则有$\angle PAF=\angle AFE$.

又由(2)可知$\angle DFC=\angle AFE$，

$\therefore \angle PAF=\angle DFC$.

若$\triangle AFP \backsim \triangle FCD$，

则$\dfrac{P_1A}{DF}=\dfrac{AF}{CF}$，即$\dfrac{P_1A}{6}=\dfrac{2\sqrt{53}}{\dfrac{3\sqrt{53}}{2}}$，解得$P_1A=8$.

$\therefore OP_1=8-6=2$，$\therefore P_1$的坐标为$(0,-2)$.

若$\triangle AFP_2 \backsim \triangle FDC$，

则$\dfrac{P_2A}{CF}=\dfrac{AF}{DF}$，即$\dfrac{P_2A}{\dfrac{3\sqrt{53}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{53}}{6}$，解得$P_2A=\dfrac{53}{2}$.

$\therefore OP_2=\dfrac{53}{2}-6=\dfrac{41}{2}$.

$\therefore P_2$的坐标为$\left(0,-\dfrac{41}{2}\right)$.

$\therefore$符合条件的点P的坐标有两个，分别是$P_1(0,-2)$，$P_2\left(0,-\dfrac{41}{2}\right)$.

【例 6】如图 2-1-2 所示，已知梯形$OABC$，抛物线分别过点$O(0,0)$、$A(2,0)$、$B(6,3)$.

(1)直接写出抛物线的对称轴、解析式及顶点M的坐标；

(2)将图 2-1-2 中梯形$OABC$的上下底边所在的直线OA、CB以相同的速度同时向上平移，分别交抛物线于点O_1、A_1、C_1、B_1，得到如图 2-1-3 的梯形$O_1A_1B_1C_1$. 设梯形$O_1A_1B_1C_1$的面积为S，A_1、B_1的坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2). 用含S的代数式表示x_2-x_1，并求出当$S=36$时点A_1的坐标；

(3)在图 2-1-2 中，设点D的坐标为$(1,3)$，动点P从点B出发，以每秒 1 个单位长度的速度沿着线段BC运动，动点Q从点D出发，以与点P相同的速度沿着线段DM运动. P、Q两点同时出发，当点Q到达点M时，P、Q两点同时停止运动. 设P、Q两点的运动时间为t，是否存在某一时刻t，使得直线PQ、直线AB、x轴围成的三角形与直线PQ、直线AB、抛物线的对称轴围成的三角形相似？若存在，请求出t的值；若不存在，请说明理由.

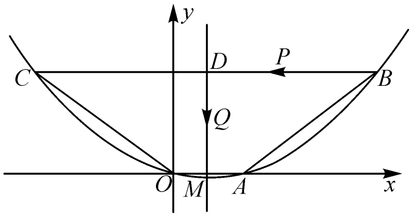


图 2-1-2

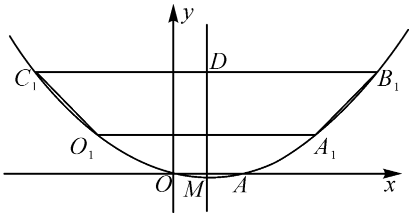


图 2-1-3

突破分析

(1)已知 O、A、B 三点坐标,运用待定系数法可求抛物线解析式,进而可求对称轴和顶点 M 坐标.

(2)首先在两直角平移过程中,抛物线对称轴没有变化,可用 x_1,x_2 表示出梯形上下底,并得到梯形面积的表达式,化简可得到①$x_1+x_2=\frac{S}{3}+2$;其次,在两直线平移过程中,梯形的高并没有变化,即 $y_2-y_1=3$,可用 x_1,x_2 表示出 y_1,y_2,进而可得到$(x_2-x_1)\cdot\left[\frac{1}{8}(x_2+x_1)-\frac{1}{4}\right]=3$,结合 $x_1+x_2=\frac{S}{3}+2$,可得到②$x_2-x_1=\frac{72}{S}$;当 $S=36$ 时代入①,②式,可求得 x_1,x_2 值,进而求出 A 点坐标.

解析

(1)抛物线的对称轴为直线 $x=1$,解析式为 $y=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x$,顶点为 $M\left(1,-\frac{1}{8}\right)$.

(2)梯形 $O_1A_1B_1C_1$ 的面积 $S=\frac{2(x_1-1+x_2-1)\times 3}{2}=3(x_1+x_2)-6$,由此得到 $x_1+x_2=\frac{S}{3}+2$. 由于 $y_2-y_1=3$,$\therefore y_2-y_1=\frac{1}{8}x_2^2-\frac{1}{4}x_2-\frac{1}{8}x_1^2+\frac{1}{4}x_1=3$. 整理,得$(x_2-x_1)\cdot\left[\frac{1}{8}(x_2+x_1)-\frac{1}{4}\right]=3$. 因此得到 $x_2-x_1=\frac{72}{S}$.

当 $S=36$ 时,$\begin{cases}x_2+x_1=14,\\x_2-x_1=2.\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=6,\\x_2=8.\end{cases}$此时点 A_1 的坐标为(6,3).

(3)如图 2-1-4、图 2-1-5 所示,设直线 AB 与 PQ 交于点 G,直线 AB 与抛物线的对称轴交于点 E,直线 PQ 与 x 轴交于点 F,那么要探求相似的$\triangle GAF$ 与$\triangle GQE$,有一个公共角$\angle G$.

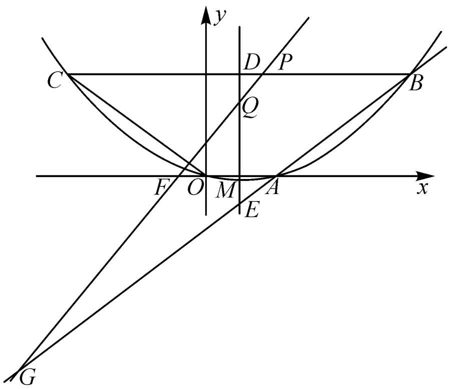


图 2-1-4

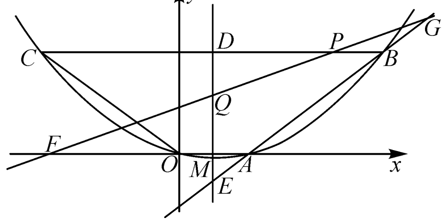


图 2-1-5

在$\triangle GEQ$ 中,$\angle GEQ$ 是直线 AB 与抛物线对称轴的夹角为定值.

在$\triangle GAF$ 中,$\angle GAF$ 是直线 AB 与 x 轴的夹角,也为定值,而且$\angle GEQ\neq\angle GAF$.

因此只存在$\angle GQE=\angle GAF$的可能，$\triangle GQE\backsim\triangle GAF$.

这时$\angle GAF=\angle GQE=\angle PQD$.

由于$\tan\angle GAF=\dfrac{3}{4}$，$\tan\angle PQD=\dfrac{DP}{DQ}=\dfrac{5-t}{t}$，

$\therefore \dfrac{3}{4}=\dfrac{5-t}{t}$. 解得$t=\dfrac{20}{7}$.

大显身手

【习题 6】如图 2-1-6 所示，已知抛物线的方程C_1：$y=-\dfrac{1}{m}(x+2)(x-m)(m>0)$与$x$轴交于点$B$、$C$，与$y$轴交于点$E$，且点$B$在点$C$的左侧.

(1)若抛物线C_1过点$M(2,2)$，求实数m的值；

(2)在(1)的条件下，求$\triangle BCE$的面积；

(3)在(1)的条件下，在抛物线的对称轴上找一点H，使得$BH+EH$最小，求出点H的坐标；

(4)在第四象限内，抛物线C_1上是否存在点F，使得以点B、C、F为顶点的三角形与$\triangle BCE$相似？若存在，求m的值；若不存在，请说明理由.

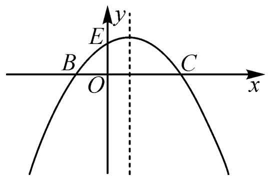


图 2-1-6

2.2 动点形成的面积问题

【例7】如图2-2-1所示，在平面直角坐标系中，顶点为$(4,-1)$的抛物线交y轴于A点，交x轴于B，C两点（点B在点C的左侧）。已知A点坐标为$(0,3)$.

(1)求此抛物线的解析式；

(2)过点B作线段AB的垂线交抛物线于点D，如果以点C为圆心的圆与直线BD相切，请判断抛物线的对称轴l与$\odot C$有怎样的位置关系，并给出证明；

(3)已知点P是抛物线上的一个动点，且位于A，C两点之间，问：当点P运动到什么位置时，$\triangle PAC$的面积最大？并求出此时P点的坐标和$\triangle PAC$的最大面积.

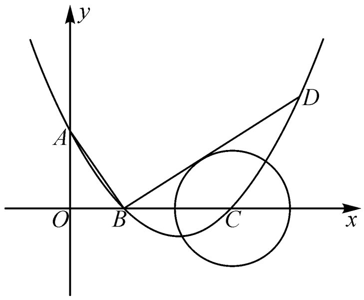


图2-2-1

突破分析

(1)设出顶点式，再将点A代入即可.

(2)此问考查相似中的三垂直模型及直线与圆的位置关系，可设直线BD与$\odot C$相切于点E，连接CE可构造三垂直模型，进而结合B、C是抛物线与x轴的交点，通过对比半径与C到l的距离，可求出对称轴l与$\odot C$的位置关系.

(3)求面积的最大值，一般来说有切线法、铅垂高法、半裱法、点到直线的距离公式法、割补法（针对特殊图形）。“半裱法”思想上和割补法差不多，具体操作是：利用两个定点做垂直，在所求三角形外面构成一个直角四边形，直角顶点和动点是对定点，并连接它们.

解析

(1)设抛物线为$y=a(x-4)^2-1$.

∵抛物线经过点$A(0,3)$，

$\therefore 3=a(0-4)^2-1.\ \therefore a=\dfrac{1}{4}$.

∴抛物线为$y=\dfrac{1}{4}(x-4)^2-1=\dfrac{1}{4}x^2-2x+3$.

(2)l与$\odot C$相交.

证明：当$\dfrac{1}{4}(x-4)^2-1=0$时，$x_1=2$，$x_2=6$.

$\therefore B(2,0)$，$C(6,0)$.

$\therefore AB=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

设$\odot C$与BD相切于点E，连接CE，则$\angle BEC=90^\circ=\angle AOB$.

$\because \angle ABD=90^\circ$，

$\therefore \angle CBE=90^\circ-\angle ABO$.

又$\because \angle BAO=90^\circ-\angle ABO$,

$\therefore \angle BAO=\angle CBE$.

$\therefore \triangle AOB\backsim\triangle BEC$.

$\therefore \dfrac{CE}{OB}=\dfrac{BC}{AB}$.

$\therefore \dfrac{CE}{2}=\dfrac{6-2}{\sqrt{13}}$.

$\therefore CE=\dfrac{8}{\sqrt{13}}>2$.

$\because$抛物线的对称轴 l 为 $x=4$,

$\therefore C$ 点到 l 的距离为 2.

$\therefore$物线的对称轴 l 与$\odot C$ 相交.

(3)方法一:

如图 2-2-2 所示,过点 P 作平行于 y 轴的直线交 AC 于点 Q.

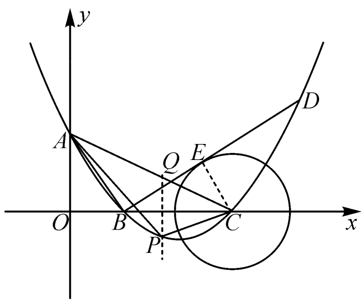


图 2-2-2

可求出 AC 的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$.

设 P 的坐标为 $\left(m,\dfrac{1}{4}m^2-2m+3\right)$,则 Q 点的坐标为 $\left(m,-\dfrac{1}{2}m+3\right)$.

$\therefore PQ=-\dfrac{1}{2}m+3-\left(\dfrac{1}{4}m^2-2m+3\right)=-\dfrac{1}{4}m^2+\dfrac{3}{2}m$.

$\because S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PAQ}+S_{\triangle PCQ}=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{4}m^2+\dfrac{3}{2}m\right)\times 6=-\dfrac{3}{4}(m-3)^2+\dfrac{27}{4}$,

$\therefore$当 $m=3$ 时,$\triangle PAC$ 的面积最大为$\dfrac{27}{4}$.

此时,P 点的坐标为$\left(3,-\dfrac{3}{4}\right)$.

方法二:

由题意,我们可以平移直线 AC,当平移到 AC 与抛物线只有一个交点的时候面积最大,

由方法一可知 AC 的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$,

$\therefore$平移后的解析式可以设为 $y=-\dfrac{1}{2}x+b$,再与 $y=\dfrac{1}{4}x^2-2x+3$ 联立,$\Delta=0$,

可以求出 b,从而求出 P 的坐标,最后在利用三点求出面积即可.

方法三：

"半棱法"，如图 2-2-3 所示，我们把所求面积变成了 $\triangle APG$ 和 $\triangle PCG$ 的面积和减去 $\triangle ACG$ 的面积，P 点的坐标为 $\left(m,\frac{1}{4}m^2-2m+3\right)$，

$\therefore \triangle APG$ 的面积为：$\left[3-\left(\frac{1}{4}m^2-2m+3\right)\right]\times AG\times\frac{1}{2}$.

同理，$\triangle PCG$ 的面积为：$\frac{1}{2}\times CG\times(6-x)$，

$\therefore$ 很容易求出 $\triangle PAC$ 的面积为：$S=-\frac{3}{4}(m-3)^2+\frac{27}{4}$.

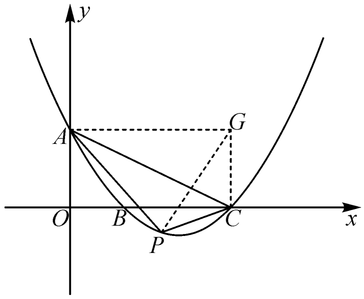


图 2-2-3

【例 8】在直角坐标系 xOy 中，已知点 P 是反比例函数 $y=\frac{2\sqrt{3}}{x}(x>0)$ 图像上一个动点，以 P 为圆心的圆始终与 y 轴相切，设切点为 A.

(1)如图 2-2-4 所示，$\odot P$ 运动到与 x 轴相切，设切点为 K，试判断四边形 $OKPA$ 的形状，并说明理由.

(2)如图 2-2-5 所示，$\odot P$ 运动到与 x 轴相交，设交点为 B，C. 当四边形 $ABCP$ 是菱形时：

①求出点 A，B，C 的坐标.

②在过 A，B，C 三点的抛物线上是否存在点 M，使 $\triangle MBP$ 的面积是菱形 $ABCP$ 面积的 $\frac{1}{2}$？若存在，试求出所有满足条件的 M 点的坐标；若不存在，试说明理由.

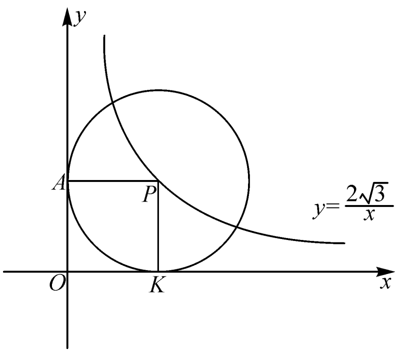


图 2-2-4

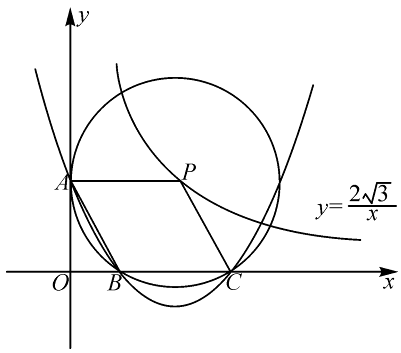


图 2-2-5

突破分析

(1)当 $\odot P$ 分别与两坐标轴相切时，且 x 轴 $\perp y$ 轴，$PA=PK$，可判断 $OKPA$ 是正方形.

(2)①连接 PB，设 $P\left(a,\frac{2\sqrt{3}}{a}\right)$，过 P 作 $PG\perp BC$ 于 G，则半径 $PB=PC$，由菱形性质得 $PC=BC$，则 $\triangle PBC$ 为等边三角形，在 Rt$\triangle$PBG 中，$\angle PBG=60^\circ$，$PB=PA=a$，$PG=\frac{2\sqrt{3}}{a}$，利用 $\sin\angle PBG=\frac{PG}{PB}$，解出 a 即可.

②根据同底等高的模型，求出直线 PB 的解析式，利用过点 A 或点 C 且平行于 PB 的直线解析式与抛物线解析式联立，列出方程组求满足条件的点 M 坐标即可.

解析

(1) $\because \odot P$ 分别与两坐标轴相切，$\therefore PA \perp OA$，$PK \perp OK$.

$\therefore \angle PAO = \angle OKP = 90^\circ$.

又 $\because \angle AOK = 90^\circ$，$\therefore \angle PAO = \angle OKP = \angle AOK = 90^\circ$.

$\therefore$ 四边形 $OKPA$ 是矩形.

又 $\because OA = OK$，$\therefore$ 四边形 $OKPA$ 是正方形.

(2) 如图 2-2-6 所示，①连接 PB，设点 P 的横坐标为 x，则其纵坐标为 $\frac{2\sqrt{3}}{x}$.

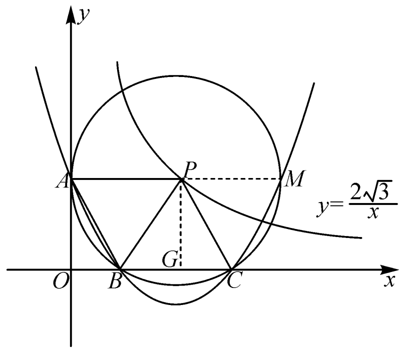


图 2-2-6

过点 P 作 $PG \perp BC$ 于 G.

$\because$ 四边形 $ABCP$ 为菱形，$\therefore BC = PA = PB = PC$.

$\therefore \triangle PBC$ 为等边三角形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PBG$ 中，$\angle PBG = 60^\circ$，$PB = PA = x$，$PG = \frac{2\sqrt{3}}{x}$.

$\sin\angle PBG = \frac{PG}{PB}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{x}}{x}$.

解之得：$x = \pm 2$（负值舍去）.

$\therefore PG = \sqrt{3}$，$PA = BC = 2$.

易知四边形 $OGPA$ 是矩形，$PA = OG = 2$，$BG = CG = 1$，

$\therefore OB = OG - BG = 1$，$OC = OG + GC = 3$.

$\therefore A(0,\sqrt{3})$，$B(1,0)$，$C(3,0)$.

设二次函数解析式为：$y = ax^2 + bx + c$.

据题意得：$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 9a+3b+c=0, \\ c=\sqrt{3}. \end{cases}$

解之得：$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$，$b = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$c = \sqrt{3}$.

$\therefore$ 二次函数关系式为：$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$.

②解法一：

设直线 BP 的解析式为：$y=ux+v$，据题意得：$\begin{cases}u+v=0,\\2u+v=\sqrt{3}.\end{cases}$

解之得：$u=\sqrt{3}$，$v=-\sqrt{3}$.

∴直线 BP 的解析式为：$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$.

过点 A 作直线 $AM//PB$，则可得直线 AM 的解析式为：$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$.

解方程组：$\begin{cases}y=\sqrt{3}x+\sqrt{3},\\y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}.\end{cases}$

得：$\begin{cases}x_1=0,\\y_1=\sqrt{3};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=7,\\y_2=8\sqrt{3}.\end{cases}$

过点 C 作直线 $CM//PB$，则可设直线 CM 的解析式为：$y=\sqrt{3}x+t$.

∴$0=3\sqrt{3}+t$. ∴$t=-3\sqrt{3}$.

∴直线 CM 的解析式为：$y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$.

解方程组：$\begin{cases}y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3},\\y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}.\end{cases}$

得：$\begin{cases}x_1=3,\\y_1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=4,\\y_2=\sqrt{3}.\end{cases}$

综上可知，满足条件的 M 的坐标有四个，

分别为：$(0,\sqrt{3})$，$(3,0)$，$(4,\sqrt{3})$，$(7,8\sqrt{3})$.

解法二：

∵$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}=\dfrac{1}{2}S_{\square PABC}$，

∴$A(0,\sqrt{3})$，$C(3,0)$显然满足条件.

延长 AP 交抛物线于点 M，由抛物线与圆的轴对称性可知，$PM=PA$.

又∵$AM//BC$，∴$S_{PBM}=S_{\triangle PBA}=\dfrac{1}{2}S_{\square PABC}$. ∴点 M 的纵坐标为$\sqrt{3}$.

又点 M 的横坐标为 $AM=PA+PM=2+2=4$.

∴点 $M(4,\sqrt{3})$符合要求.

点$(7,8\sqrt{3})$的求法同解法一.

综上可知，满足条件的 M 的坐标有四个，

分别为：$(0,\sqrt{3})$，$(3,0)$，$(4,\sqrt{3})$，$(7,8\sqrt{3})$.

解法三：

延长 AP 交抛物线于点 M，由抛物线与圆的轴对称性可知，$PM=PA$.

又∵$AM /\!/ BC$，∴$S_{\triangle PBM}=S_{\triangle PBA}=\dfrac{1}{2}S_{\square PABC}$.

∴点 M 的纵坐标为$\sqrt{3}$.

即$\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

解得：$x_1=0$（舍），$x_2=4$.

∴点 M 的坐标为$(4,\sqrt{3})$.

点$(7,8\sqrt{3})$的求法同解法一.

综上可知，满足条件的 M 的坐标有四个，

分别为：$(0,\sqrt{3})$，$(3,0)$，$(4,\sqrt{3})$，$(7,8\sqrt{3})$.

大显身手

【习题 7】如图 2-2-7 所示，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，P 为 AB 的中点，Q 为边 CD 上一动点，设$DQ=t(0\leqslant t\leqslant 2)$，线段 PQ 的垂直平分线分别交边 AD、BC 于点 M、N，过 Q 作 $QE\perp AB$ 于点 E，过 M 作 $MF\perp BC$ 于点 F.

(1)当 $t\neq 1$ 时，求证：$\triangle PEQ\cong\triangle NFM$；

(2)顺次连接 P、M、Q、N，设四边形 $PMQN$ 的面积为 S，求出 S 与自变量 t 之间的函数关系式，并求 S 的最小值.

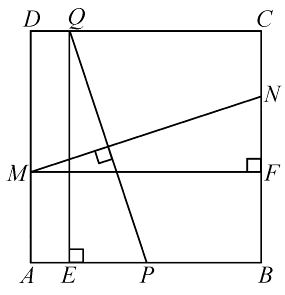


图 2-2-7

2.3 动点形成的线段最值问题

【例9】已知,如图2-3-1所示,二次函数 $y=ax^2+2ax-3a(a\neq 0)$ 图像的顶点为 H,与 x 轴交于 A、B 两点(B 在 A 点右侧),点 H、B 关于直线 l:$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$ 对称.

(1)求 A、B 两点坐标,并证明点 A 在直线 l 上;

(2)求二次函数解析式;

(3)过点 B 作直线 $BK\parallel AH$ 交直线 l 于 K 点,M、N 分别为直线 AH 和直线 l 上的两个动点,连接 HN、NM、MK,求 $HN+NM+MK$ 的最小值.

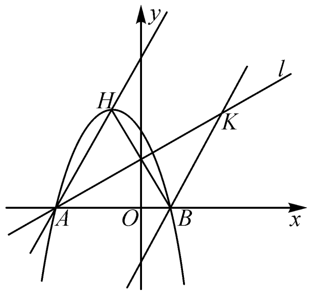


图 2-3-1

突破分析

(1)令 $y=0$,可求得,A、B 两点坐标,然后将 A 点坐标代入 l 即可.

(2)利用垂直平分线定理,得出 $HA=AB$,构造 Rt△,可求出 H 点坐标,再利用待定系数法求解即可.

(3)中很典型的"将军饮马问题",将军饮马中最重要的是找"河"和"定点","河"即动点所在的直线,这里 AH 和 l 是"河",H、K 为对称点,所以只要找出 H 关于 l 的对称点 B 以及 K 关于 AH 的对称点,最后用两点之间距离最短求出即可.

解析

(1)依题意,得 $ax^2+2ax-3a=0(a\neq 0)$,

解得 $x_1=-3$,$x_2=1$.

∵B 点在 A 点右侧,∴A 点坐标为$(-3,0)$,B 点坐标为$(1,0)$.

∵直线 l:$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$,

当 $x=-3$ 时,$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-3)+\sqrt{3}=0$,

∴点 A 在直线 l 上.

(2)∵点 H、B 关于过 A 点的直线 l:$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$ 对称,

$\therefore AH=AB=4$.

过顶点 H 作 $HC\perp AB$ 交 AB 于 C 点，

则 $AC=\frac{1}{2}AB=2, HC=2\sqrt{3}$，

$\therefore$ 顶点 $H(-1,2\sqrt{3})$.

把 $H(-1,2\sqrt{3})$ 代入二次函数解析式，解得 $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore$ 二次函数解析式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\sqrt{3}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(3) 直线 AH 的解析式为 $y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$，

直线 BK 的解析式为 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$，

由 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}, \\ y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=2\sqrt{3}. \end{cases}$ 即 $K(3,2\sqrt{3})$，则 $BK=4$.

$\because$ 点 H、B 关于直线 AK 对称.

$\therefore HN+MN$ 的最小值是 MB，过 K 作 $KD\perp x$ 轴于 D 点. $KD=KE=2\sqrt{3}$，

过点 K 作直线 AH 的对称点 Q，连接 QK，交直线 AH 于 E，

则 $QM=MK, QE=EK=2\sqrt{3}, AE\perp QK$.

$\therefore BM+ME$ 的最小值是 BQ，即 BQ 的长是 $HN+NM+MK$ 的最小值，

$\because BK/\!/AH$，

$\therefore \angle BKQ=\angle HEQ=90^\circ$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BKQ$ 中，由勾股定理得 $QB=8$，

$\therefore HN+NM+MK$ 的最小值为 8.

【习题 8】如图 2-3-2 所示，在平面直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 是直角梯形，$BC /\!/ AD$，$\angle BAD=90^\circ$，BC 与 y 轴相交于点 M，且 M 是 BC 的中点，A、B、D 三点的坐标分别是 $A(-1,0)$，$B(-1,2)$，$D(3,0)$，连接 DM，并把线段 DM 沿 DA 方向平移到 ON，若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 D、M、N.

(1)求抛物线的解析式；

(2)抛物线上是否存在点 P，使得 $PA=PC$？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

(3)设抛物线与 x 轴的另一个交点为 E，点 Q 是抛物线的对称轴上的一个动点，当点 Q 在什么位置时有 $|QE-QC|$ 最大？并求出最大值.

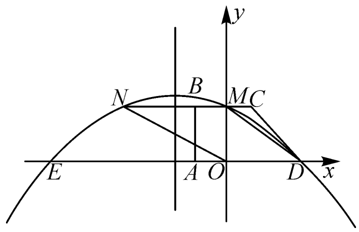


图 2-3-2

2.4 动点形成的特殊三角形

【例 10】如图 2-4-1 所示，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $A(-1,0)$、$B(3,0)$、$C(0,3)$三点，直线 l 是抛物线的对称轴.

(1)求抛物线的函数关系式；

(2)设点 P 是直线 l 上的一个动点，当$\triangle PAC$ 的周长最小时，求点 P 的坐标；

(3)在直线 l 上是否存在点 M，使$\triangle MAC$ 为等腰三角形？若存在，直接写出所有符合条件的点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

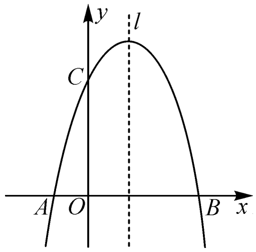


图 2-4-1

突破分析

(1)利用待定系数法求解即可.

(2)考查典型的“将军饮马”问题，即求最值问题. 常考的最值问题有“和最小，异侧求，差最大，同侧求”，此问只需做 A 关于 l 对称点 B，求出 BC 与 l 交点即为 P 点.

(3)等腰三角形的构造原理：“两圆一垂直”，分三种情况列方程讨论等腰三角形的存在性即可.

解析

(1)∵抛物线与 x 轴交于 $A(-1,0)$、$B(3,0)$两点，设 $y=a(x+1)(x-3)$，代入点 $C(0,3)$，得$-3a=3$. 解得 $a=-1$.

∴抛物线的函数关系式是 $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$.

(2)如图 2-4-2 所示，抛物线的对称轴是直线 $x=1$.

当点 P 落在线段 BC 上时，$PA+PC$ 最小，$\triangle PAC$ 的周长最小.

设抛物线的对称轴与 x 轴的交点为 H.

由$\dfrac{BH}{BO}=\dfrac{PH}{CO}$，$BO=CO$，得 $PH=BH=2$.

∴点 P 的坐标为$(1,2)$.

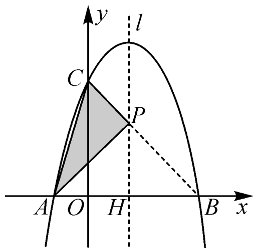


图 2-4-2

(3)点 M 的坐标为$(1,1)$、$(1,\sqrt{6})$、$(1,-\sqrt{6})$或$(1,0)$.

【例 11】已知：如图 2-4-3 所示，在平面直角坐标系 xOy 中，矩形 $OABC$ 的边 OA 在 y 轴的正半轴上，OC 在 x 轴的正半轴上，$OA=2$，$OC=3$，过原点 O 作 $\angle AOC$ 的平分线交 AB 于点 D，连接 DC，过点 D 作 $DE\perp DC$，交 OA 于点 E.

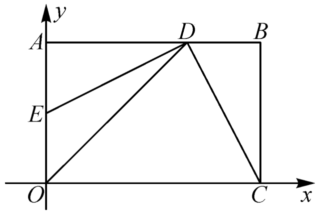


图 2-4-3

(1)求过点 E、D、C 的抛物线的解析式.

(2)将$\angle EDC$ 绕点 D 按顺时针方向旋转后，角的一边与 y 轴的正半轴交于点 F，另一边与线段 OC 交于点 G. 如果 DF 与(1)中的抛物线交于另一点 M，点 M 的横坐标为 $\frac{6}{5}$，那么 $EF=2GO$ 是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，请说明理由.

(3)对于(2)中的点 G，在位于第一象限内的该抛物线上是否存在点 Q，使得直线 GQ 与 AB 的交点 P 与点 C、G 构成的$\triangle PCG$ 是等腰三角形？若存在，请求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

突破分析

(1)先求解 E、D、C 三点坐标，利用待定系数法求解析式即可.

(2)此问考查旋转及相似问题."A"字模型，只需过 M 作 $MN\perp AB$，求出 FA 长，进而求出 $EF=CG=2$ 即可.

(3)利用等腰三角形的构造方法"两圆一直线"，讨论$\triangle PCG$ 为等腰三角形时的三种情况，然后根据点 P 位置确定点 Q 位置，再计算点 Q 坐标即可.

解析

(1)$\because OD$ 平分$\angle AOC$，

$\therefore$点 D 的坐标为$(2,2)$，因此 $BC=AD=1$.

$\because \triangle BCD\cong\triangle ADE$，

$\therefore BD=AE=1$，因此点 E 的坐标为$(0,1)$.

设过 E、D、C 三点的抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$，那么 $\begin{cases}c=1,\\4a+2b+c=2,\\9a+3b+c=0.\end{cases}$

解得 $a=-\frac{5}{6}$，$b=\frac{13}{6}$，$c=1$.

因此过 E、D、C 三点的抛物线的解析式为 $y=-\frac{5}{6}x^2+\frac{13}{6}x+1$.

(2)把 $x=\frac{6}{5}$代入 $y=-\frac{5}{6}x^2+\frac{13}{6}x+1$，求得 $y=\frac{12}{5}$.

$\therefore$点 M 的坐标为$\left(\frac{6}{5},\frac{12}{5}\right)$.

如图 2-4-4 所示，过点 M 作 $MN\perp AB$，垂足为 N，那么

$\frac{MN}{FA}=\frac{DN}{DA}$，即 $\frac{\frac{12}{5}-2}{FA}=\frac{2-\frac{6}{5}}{2}$.

解得 $FA=1$.

$\because \angle EDC$ 绕点 D 旋转的过程中，$\triangle DCG\cong\triangle DEF$，

$\therefore CG=EF=2$. 因此 $GO=1$，$EF=2GO$.

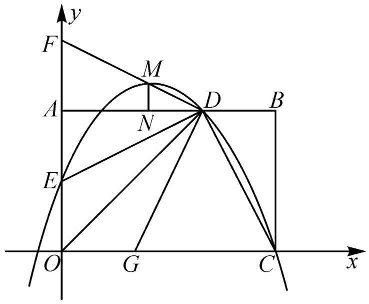


图 2-4-4

（3）由（2）知，$GC=2$. 设点 Q 的坐标为 $\left(x,-\frac{5}{6}x^2+\frac{13}{6}x+1\right)$.

①如图 2-4-5 所示，当 $CP=CG=2$ 时，点 P 与点 $B(3,2)$ 重合，$\triangle PCG$ 是等腰直角三角形.

此时 $y_Q=x_Q-x_G$，因此 $-\frac{5}{6}x^2+\frac{13}{6}x+1=x-1$.

由此得到点 Q 的坐标为 $\left(\frac{12}{5},\frac{7}{5}\right)$.

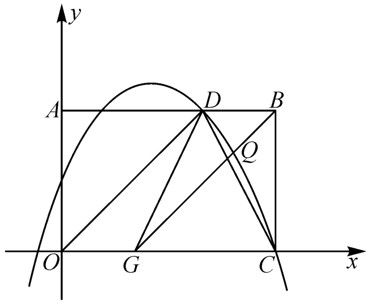


图 2-4-5

②如图 2-4-6 所示，当 $GP=GC=2$ 时，点 P 的坐标为 $(1,2)$. 此时点 Q 的横坐标为 1，点 Q 的坐标为 $\left(1,\frac{13}{6}\right)$.

③如图 2-4-7 所示，当 $PG=PC$ 时，点 P 在 GC 的垂直平分线上，点 P、Q 与点 D 重合. 此时点 Q 的坐标为 $(2,2)$.

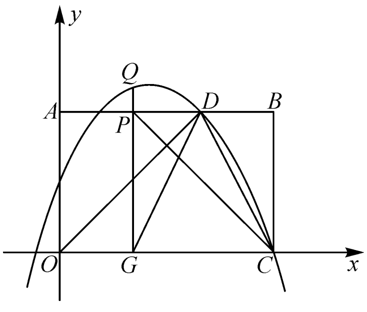


图 2-4-6

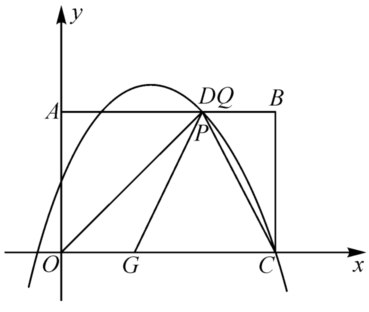


图 2-4-7

大显身手

【习题 9】 如图 2-4-8 所示，抛物线 $y=-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x+3$ 与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C.

（1）求点 A、B 的坐标；

（2）设 D 为已知抛物线的对称轴上的任意一点，当△ACD 的面积等于△ACB 的面积时，求点 D 的坐标；

（3）若直线 l 过点 $E(4,0)$，M 为直线 l 上的动点，当以 A、B、M 为顶点所作的直角三角形有且只有三个时，求直线 l 的解析式.

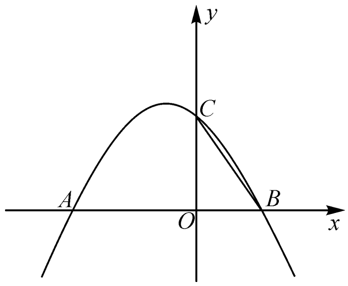


图 2-4-8

【习题 10】在平面直角坐标系 xOy 中，现将一块等腰直角三角板 ABC 放在第一象限，斜靠在两坐标轴上，且点 $A(0,2)$，点 $C(1,0)$，如图 2-4-9 所示. 抛物线 $y=ax^2-ax-2$ 经过点 B.

(1)求点 B 的坐标；

(2)求抛物线的解析式；

(3)在抛物线上是否还存在点 P(点 B 除外)，使△ACP 仍然是以 AC 为直角边的等腰直角三角形？若存在，求点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

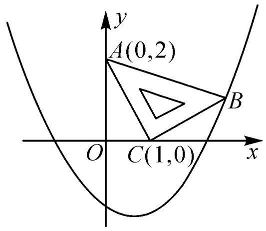


图 2-4-9

2.5 动点形成的特殊四边形

【例 12】如图 2-5-1 所示，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交 x 轴于点 $A(-3,0)$，点 $B(1,0)$，交 y 轴于点 $E(0,-3)$. 点 C 是点 A 关于点 B 的对称点，点 F 是线段 BC 的中点，直线 l 过点 F 且与 y 轴平行. 直线 $y=-x+m$ 过点 C，交 y 轴于 D.

(1)求抛物线的函数表达式；

(2)点 K 为线段 AB 上一动点，过点 K 作 x 轴的垂线与直线 CD 交于点 H，与抛物线交于点 G，求线段 HG 长度的最大值；

(3)在直线 l 上取点 M，在抛物线上取点 N，使以点 A,C,M,N 为顶点的四边是平行四边形，求点 N 的坐标.

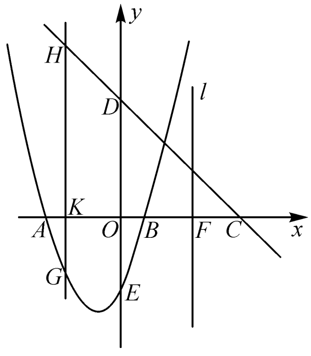


图 2-5-1

突破分析

(1)运用待定系数法即可求解函数表达式.

(2)只需设 H 或 G 点横坐标，然后分别代入直线和抛物线，纵坐标作差，再配方即可.

(3)针对四个点构成特殊的四边形，做题的入手点要从特殊四边形的性质入手. 此题四个点构成平行四边形，分三步求解. 第一步找定点，一般会给 3 个定点或 2 个定点，若 3 个定点，则有 3 种情况，此题只有 2 个动点；第二步分情况，2 个动点时，要讨论固定的线段充当边和对角线两种情况；第三步结合平行四边形性质求解即可.

解析

(1)设抛物线的函数表达式 $y=a(x-1)(x+3)$，

∵抛物线与 y 轴交于点 $E(0,-3)$，将该点坐标代入上式，得 $a=1$.

∴所求函数表达式 $y=(x-1)(x+3)$，即 $y=x^2+2x-3$.

(2)∵点 C 是点 A 关于点 B 的对称点，点 $A(-3,0)$，点 $B(1,0)$，

∴点 C 的坐标是 $C(5,0)$.

将点 C 的坐标是 $C(5,0)$ 代入 $y=-x+m$，得 $m=5$.

∴直线 CD 的函数表达式为 $y=-x+5$.

设 K 点的坐标为 $(t,0)$，则 H 点的坐标为 $(t,-t+5)$，G 点的坐标为 (t,t^2+2t-3).

∵点 K 为线段 AB 上一动点，∴$-3\leqslant t\leqslant 1$.

∴$HG=(-t+5)-(t^2+2t-3)=-t^2-3t+8=-\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{41}{4}$.

∵$-3\leqslant t\leqslant 1$，∴当 $t=-\dfrac{3}{2}$ 时，线段 HG 长度有最大值 $\dfrac{41}{4}$.

(3)如图 2-5-2 所示，∵点 F 是线段 BC 的中点，点 $B(1,0)$，点 $C(5,0)$，

∴点 F 的坐标为 $F(3,0)$.

∵直线 l 过点 F 且与 y 轴平行,

∴直线 l 的函数表达式为 $x=3$.

∵点 M 在直线 l 上,点 N 在抛物线上,

∴设点 M 的坐标为 $M(3,m)$,点 N 的坐标为 $N(n,n^2+2n-3)$.

∵点 $A(-3,0)$,点 $C(5,0)$,∴$AC=8$.

分情况讨论:

①若线段 AC 是以点 A,C,M,N 为顶点的平行四边形的边,则须 $MN/\!/AC$,且 $MN=AC=8$.当点 N 在点 M 的左侧时,$MN=3-n$.

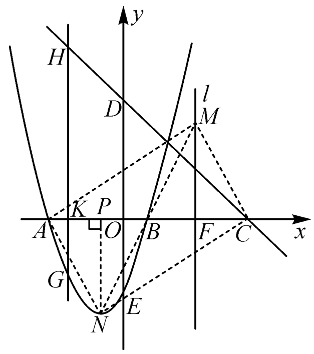


图 2-5-2

∴$3-n=8$,解得 $n=-5$.

∴N 点的坐标为 $N(-5,12)$.

当点 N 在点 M 的右侧时,$MN=n-3$.

∴$n-3=8$,解得 $n=11$.

∴N 点的坐标为 $N(11,40)$.

②若线段 AC 是以点 A,C,M,N 为顶点的平行四边形的对角线,由“点 C 与点 A 关于点 B 中心对称”知:点 M 与点 N 关于点 B 中心对称.取点 F 关于点 B 对称点 P,则点 P 的坐标为 $P(-1,0)$.过点 P 作 $NP\perp x$ 轴,交抛物线于点 N.

将 $x=-1$ 代入 $y=x^2+2x-3$,得 $y=-4$.

过点 N,B 作直线 NB 交直线 l 于点 M.

在△BPN 和△BFM 中,

$$\because\begin{cases}\angle NPB=\angle MBF,\\ BF=BP,\\ \angle BPN=\angle BFM=90^\circ.\end{cases}$$

∴△BPN≌△BFM.∴$NB=MB$.

∴四边形点 $ANCM$ 为平行四边形.

∴坐标为$(-1,-4)$的点 N 符合条件.

∴当点 N 的坐标为$(-5,12)$,$(11,40)$,$(-1,-4)$时,以点 A,C,M,N 为顶点的四边是平行四边形.

【例 13】如图 2-5-3 所示，把两个全等的 Rt△AOB 和 Rt△COD 分别置于平面直角坐标系中，使直角边 OB、OD 在 x 轴上．已知点 $A(1,2)$，过 A、C 两点的直线分别交 x 轴、y 轴于点 E、F．抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 O、A、C 三点．

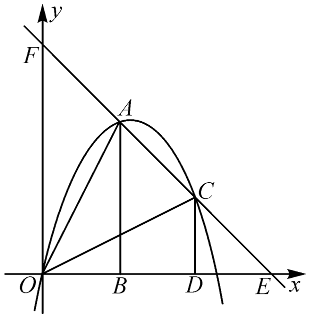


图 2-5-3

(1)求该抛物线的函数解析式．

(2)点 P 为线段 OC 上的一个动点，过点 P 作 y 轴的平行线交抛物线于点 M，交 x 轴于点 N．问是否存在这样的点 P，使得四边形 $ABPM$ 为等腰梯形？若存在，求出此时点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

(3)若△AOB 沿 AC 方向平移(点 A 始终在线段 AC 上，且不与点 C 重合)，△AOB 在平移的过程中与△COD 重叠部分的面积记为 S．试探究 S 是否存在最大值？若存在，求出这个最大值；若不存在，请说明理由．

突破分析

(1)运用待定系数法求解即可．

(2)如果四边形 $ABPM$ 是等腰梯形，那么 AB 为较长的底边，这个等腰梯形可以分割为一个矩形和两个全等的直角三角形，AB 边分成的 3 小段，两侧的线段长相等即可求作．

(3)此问考查：①运用割补法求四边形面积；②平移中牢记线段长度的不变性；③利用点的坐标转化成线段的长度，进而表示出面积．

解析

(1)将 $A(1,2)$、$O(0,0)$、$C(2,1)$ 分别代入 $y=ax^2+bx+c$，

得 $\begin{cases} a+b+c=2, \\ c=0, \\ 4a+2b+c=1. \end{cases}$

解得 $a=-\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{7}{2}$，$c=0$．

$\therefore y=-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{7}{2}x$．

(2)如图 2-5-4 所示，过点 P、M 分别作梯形 $ABPM$ 的高 PP'、MM'，

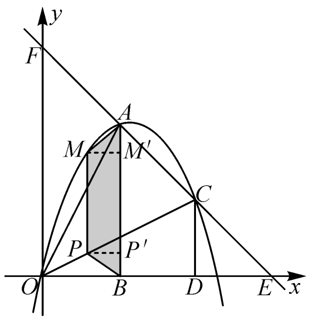


图 2-5-4

如果梯形 $ABPM$ 是等腰梯形，那么 $AM'=BP'$，因此 $yA-yM'=yP'-yB$．

直线 OC 的解析式为 $y=\dfrac{1}{2}x$，

设点 P 的坐标为 $\left(x,\dfrac{1}{2}x\right)$，那么 $M\left(x,-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{7}{2}x\right)$．

解方程 $2-\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x\right)=\frac{1}{2}x$，得 $x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=2$.

$x=2$ 的几何意义是 P 与 C 重合，此时梯形不存在. $\therefore P\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

(3)如图 2-5-5 所示，$\triangle A'O'B'$ 与 $\triangle COD$ 重叠部分的形状是四边形 $EFGH$，作 $EK\perp OD$ 于 K.

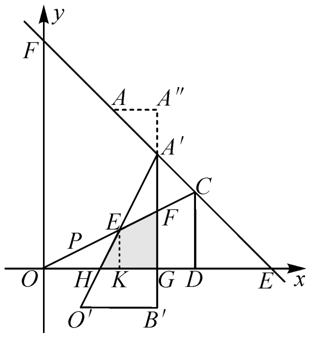


图 2-5-5

设点 A' 移动的水平距离为 m，那么 $OG=1+m$，$GB'=m$.

在 Rt$\triangle OFG$ 中，$FG=\frac{1}{2}OG=\frac{1}{2}(1+m)$.

$\therefore S_{\triangle OFG}=\frac{1}{4}(1+m)^2$.

在 Rt$\triangle A'HG$ 中，$A'G=2-m$，

$\therefore HG=\frac{1}{2}A'G=\frac{1}{2}(2-m)=1-\frac{1}{2}m$.

$\therefore OH=OG-HG=(1+m)-\left(1-\frac{1}{2}m\right)=\frac{3}{2}m$.

在 Rt$\triangle OEK$ 中，$OK=2EK$；在 Rt$\triangle EHK$ 中，$EK=2HK$；

$\therefore OK=4HK$.

因此 $OK=\frac{4}{3}OH=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}m=2m$.

$\therefore EK=\frac{1}{2}OK=m$.

$\therefore S_{\triangle OEH}=\frac{1}{2}OH\cdot EK=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}m\cdot m=\frac{3}{4}m^2$.

于是 $S=S_{\triangle OFG}-S_{\triangle OEH}=\frac{1}{4}(1+m)^2-\frac{3}{4}m^2=-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{8}$.

$\because 0<m<1$，

$\therefore$ 当 $m=\frac{1}{2}$ 时，S 取得最大值，最大值为 $\frac{3}{8}$.

大显身手

【习题 11】如图 2-5-6 所示，在平面直角坐标系 xOy 中，已知矩形 $ABCD$ 的三个顶点 $B(1,0)$、$C(3,0)$、$D(3,4)$. 以 A 为顶点的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 C. 动点 P 从点 A 出发，沿线段 AB 向点 B 运动，同时动点 Q 从点 C 出发，沿线段 CD 向点 D 运动. 点 P、Q 的运动速度均为每秒 1 个单位，运动时间为 t 秒. 过点 P 作 $PE\perp AB$ 交 AC 于点 E.

(1)直接写出点 A 的坐标，并求出抛物线的解析式；

(2)过点 E 作 $EF\perp AD$ 于 F，交抛物线于点 G，当 t 为何值时，$\triangle ACG$ 的面积最大？最大值为多少？

(3)在动点 P、Q 运动的过程中，当 t 为何值时，在矩形 $ABCD$ 内(包括边界)存在点 H，使以 C、Q、E、H 为顶点的四边形为菱形？请直接写出 t 的值.

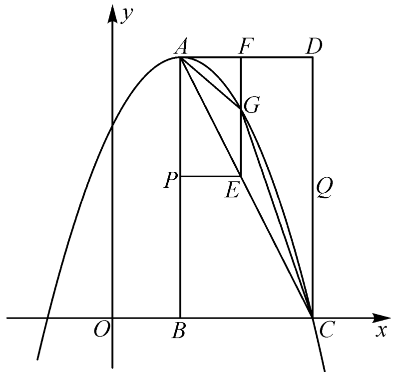


图 2-5-6

2.6 动点形成的角度问题

【例 14】在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 经过点 $N(2,-5)$，过点 N 作 x 轴的平行线交此抛物线左侧于点 M，$MN=6$.

(1)求此抛物线的解析式；

(2)点 $P(x,y)$ 为此抛物线上一动点，连接 MP 交此抛物线的对称轴于点 D. 当△DMN 为直角三角形时，求点 P 的坐标；

(3)设此抛物线与 y 轴交于点 C，在此抛物线上是否存在点 Q，使∠QMN=∠CNM? 若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，说明理由.

突破分析

(1)根据抛物线对称性得出 M 点坐标，再利用待定系数法即可.

(2)由直角三角形的构造方法"一圆两垂直"，再结合 M,N 与对称轴对称即可求解.

(3)在坐标系内证明角度相等最常用方法有：全等、相似、角平分线定理、等腰三角形、三角函数(尤其正切值). 而本题 MN 平行于 x 轴，用三角函数会很方便.

解析

(1)∵ $y=ax^2+bx+3$ 过点 M、$N(2,-5)$，$MN=6$，

由题意，得 $M(-4,-5)$.

∴ $\begin{cases}4a+2b+3=-5,\\16a-4b+3=-5.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$

∴此抛物线的解析式为 $y=-x^2-2x+3$.

(2)如图 2-6-1 所示，设抛物线的对称轴 $x=-1$ 交 MN 于点 G，

若△DMN 为直角三角形，则 $GD_1=GD_2=\frac{1}{2}MN=3$.

∴ $D_1(-1,-2)$，$D_2(-1,-8)$.

直线 MD_1 为 $y=x-1$，直线 MD_2 为 $y=-x-9$.

将 $P(x,-x^2-2x+3)$ 分别代入直线 MD_1，MD_2 的解析式，

得 $-x^2-2x+3=x-1$①，$-x^2-2x+3=-x-9$②.

解①得 $x_1=1$，$x_2=-4$(舍)，∴ $P_1(1,0)$.

解②得 $x_3=3$，$x_4=-4$(舍)，∴ $P_2(3,-12)$.

(3)如图 2-6-2 所示，设存在点 $Q(x,-x^2-2x+3)$，

使得∠QMN=∠CNM.

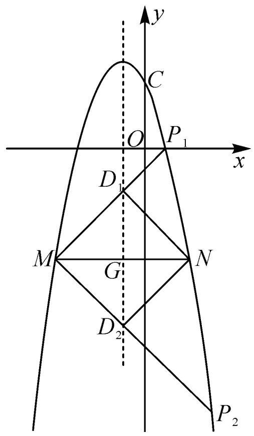


图 2-6-1

①若点 Q 在 MN 上方，过点 Q 作 $QH\perp MN$，交 MN 于点 H，则

$\frac{QH}{MH}=\tan\angle CNM=4$.

即 $-x^2-2x+3+5=4(x+4)$.

解得 $x_1=-2,x_2=-4$(舍).

$\therefore Q_1(-2,3)$

②若点 Q 在 MN 下方，

同理可得 $Q_2(6,-45)$.

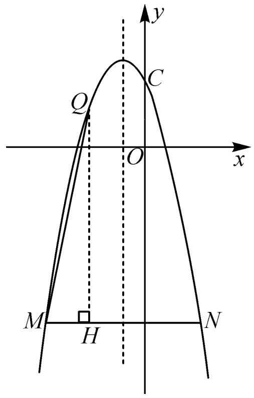


图 2-6-2

大显身手

【习题 12】如图 2-6-3 所示，抛物线 $y=ax^2+bx-4a$ 经过 $A(-1,0)$、$C(0,4)$两点，与 x 轴交于另一点 B.

(1)求抛物线的解析式；

(2)已知点 $D(m,m+1)$在第一象限的抛物线上，求点 D 关于直线 BC 对称的点的坐标；

(3)在(2)的条件下，连接 BD，点 P 为抛物线上一点，且$\angle DBP=45°$，求点 P 的坐标.

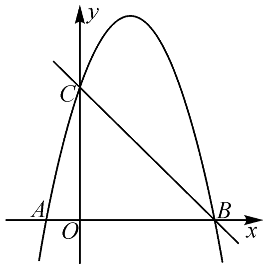


图 2-6-3

2.7 动点形成的定值问题

【例 15】如图 2-7-1 所示，以点 $M(-1,0)$ 为圆心的圆与 y 轴、x 轴分别交于点 A、B、C、D，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{5\sqrt{3}}{3}$ 与 $\odot M$ 相切于点 H，交 x 轴于点 E，交 y 轴于点 F.

(1) 请直接写出 OE、$\odot M$ 的半径 r、CH 的长；

(2) 如图 2-7-2 所示，弦 HQ 交 x 轴于点 P，且 $DP:PH=3:2$，求 $\cos\angle QHC$ 的值；

(3) 如图 2-7-3 所示，点 K 为线段 EC 上一动点（不与 E、C 重合），连接 BK 交 $\odot M$ 于点 T，弦 AT 交 x 轴于点 N. 是否存在一个常数 a，始终满足 $MN\cdot MK=a$？如果存在，请求出 a 的值；如果不存在，请说明理由.

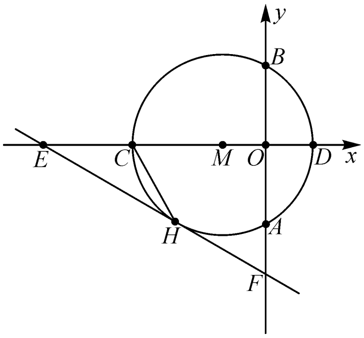


图 2-7-1

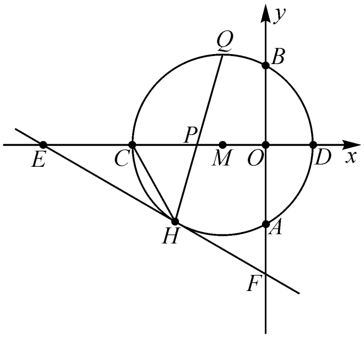


图 2-7-2

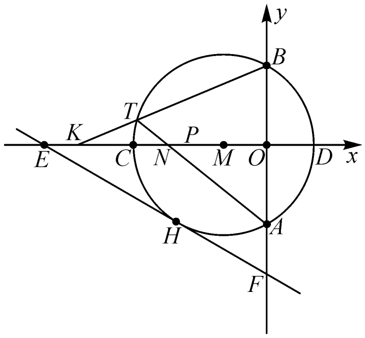


图 2-7-3

突破分析

(1) 由 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 得出直线 EF 与 x 轴夹角为 $30°$，从而在 $\mathrm{Rt}\triangle EHM$ 中解出 CH、MH.

(2) 涉及到三角函数一般放在 $\mathrm{Rt}\triangle$ 中，在圆中用直径构造直角是最常见的方法. 连接 QD、QC 后，由相似，反 8 字模型可得 $\triangle CHP\backsim\triangle QOP$，进而可求得 $\cos\angle QHC$.

(3) 此问考查相似模型，以及由直径构造 $\mathrm{Rt}\triangle$ 问题. 由题中同端点同直线引出的线段乘积，优先选择“射影定理”. 若 $\triangle MNT\backsim\triangle MTK$ 可得 $MN\cdot MK=TM^2=4$. ∴ 只需寻求 $\triangle MNT\backsim\triangle MTK$ 条件即可.

解析

(1) 如图 2-7-4 所示，$OE=5$，$r=2$，$CH=2$.

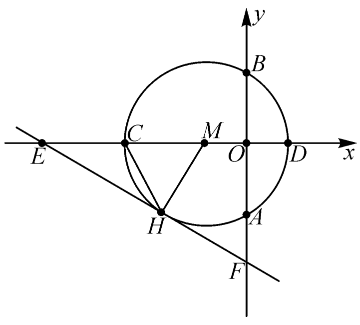


图 2-7-4

(2)如图 2-7-5 所示,连接 QC、QD,则$\angle CQD=90^\circ$,$\angle QHC=\angle QDC$.

易知$\triangle HCP\backsim\triangle DQP$,故$\dfrac{DP}{PH}=\dfrac{DQ}{CH}$,$\dfrac{3}{2}=\dfrac{DQ}{2}$,$DQ=3$.

$\because CD=4$,

$\therefore \cos\angle QHC=\cos\angle QDC=\dfrac{QD}{CD}=\dfrac{3}{4}$.

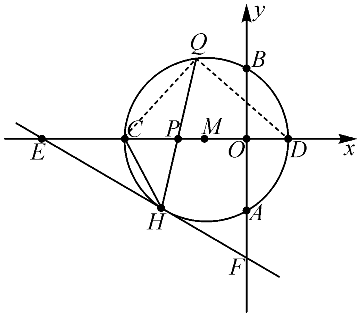


图 2-7-5

(3)方法一:

如图 2-7-6 所示,连接 TM 并延长交圆与 L,连接 LA,由题意$\angle BKO+\angle KBO=90^\circ$,$\angle LTA+\angle TLA=90^\circ$,$\angle KBO=\angle TLA$,

$\therefore \angle OKB=\angle ATL$,

$\therefore \triangle TMN$ 与$\triangle KMT$ 相似,

$\therefore TM^2=MN\cdot MK=4$.

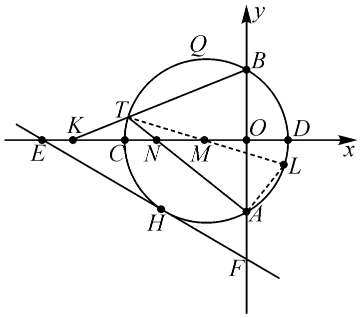


图 2-7-6

方法二:

如图 2-7-7 所示,连接 AK,AM,延长 AM,与圆交于点 G,连接 TG,则$\angle GTA=90^\circ$,

$\therefore \angle 2+\angle 4=90^\circ$.

$\because \angle 3=\angle 4$,$\therefore \angle 2+\angle 3=90^\circ$.

由于$\angle BKO+\angle 3=90^\circ$,故$\angle BKO=\angle 2$.

而$\angle BKO=\angle 1$,故$\angle 1=\angle 2$.

在$\triangle AMK$ 和$\triangle NMA$ 中,$\angle 1=\angle 2$,$\angle AMK=\angle NMA$,

故$\triangle AMK\backsim\triangle NMA$.

$\dfrac{MN}{AM}=\dfrac{AM}{MK}$,

即 $MN\cdot MK=AM^2=4$.

故存在常数 a,始终满足 $MN\cdot MK=a$,

常数 $a=4$.

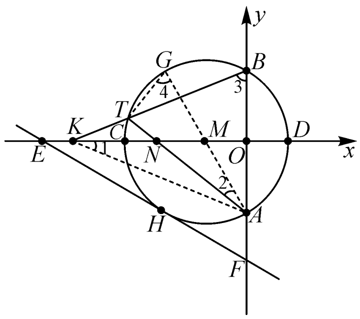


图 2-7-7

大显身手

【习题 13】如图 2-7-8 所示，在平面直角坐标系 xOy 中，点 M 在 x 轴的正半轴上，$\odot M$ 交 x 轴于 A、B 两点，交 y 轴于 C、D 两点，且 C 为 $\overset{\frown}{AE}$ 的中点，AE 交 y 轴于 G 点，若点 A 的坐标为 $(-2,0)$，$AE=8$.

(1)求点 C 的坐标.

(2)连接 MG、BC，求证：$MG\parallel BC$.

(3)如图 2-7-9 所示，过点 D 作 $\odot M$ 的切线，交 x 轴于点 P. 动点 F 在 $\odot M$ 的圆周上运动时，$\dfrac{OF}{PF}$ 的比值是否发生变化？若不变，求出比值；若变化，说明变化规律.

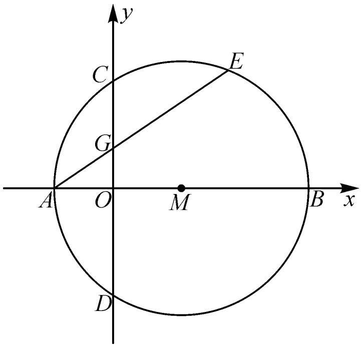


图 2-7-8

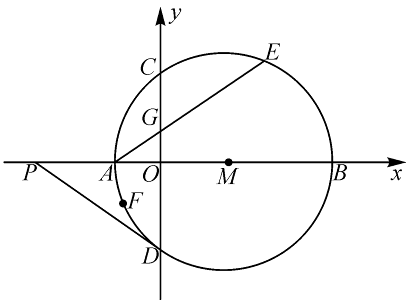


图 2-7-9

第三章　函数中的形动问题

3.1　线动产生的面积问题

【例 16】在$\triangle ABC$中，$\angle A=90^\circ$，$AB=4$，$AC=3$，M是AB上的动点（不与A，B重合），过M点作$MN\parallel BC$交AC于点N．以MN为直径作$\odot O$，并在$\odot O$内作内接矩形$AMPN$．令$AM=x$．

（1）用含x的代数式表示$\triangle MNP$的面积S；

（2）当x为何值时，$\odot O$与直线BC相切？

（3）在动点M的运动过程中，记$\triangle MNP$与梯形$BCNM$重合的面积为y，试求y关于x的函数表达式，并求x为何值时，y的值最大，最大值是多少？

突破分析

（1）如图 3-1-1 所示，由四边形$AMPN$是矩形，则可得$S_{\triangle AMN}=S_{\triangle PMN}$，用$x$表示出$S_{\triangle AMN}$即可．

（2）如图 3-1-2 所示，此问考查相似的运用，作$MQ\perp BC$于Q，由$\triangle AMN\backsim\triangle ABC$，及$\triangle BMQ\backsim\triangle BCA$可表求出$AB=AM+BM=x+\frac{25}{24}x$，即可求得$x$值．

（3）如图 3-1-3 所示，在平移MN的过程中很容易发现公共部分可以是开始的三角形的面积，也可以是梯形的面积，所以我们要找到分界点，即P在BC的时候，然后分类讨论即可．

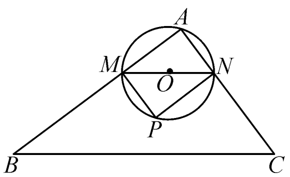


图 3-1-1

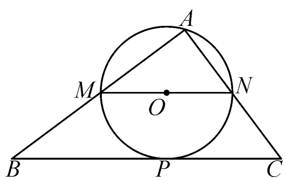


图 3-1-2

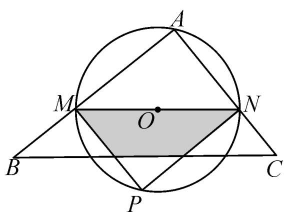


图 3-1-3

解析

（1）如图 3-1-4 所示，$\because MN\parallel BC$，

$\therefore\angle AMN=\angle B$，$\angle ANM=\angle C$．

$\therefore\triangle AMN\backsim\triangle ABC$．

$\therefore\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$，即$\frac{x}{4}=\frac{AN}{3}$．

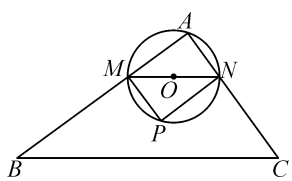


图 3-1-4

$\therefore AN=\frac{3}{4}x$.

$\therefore S=S_{\triangle MNP}=S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}x\cdot x=\frac{3}{8}x^2$.$(0<x<4)$

(2)如图 3-1-5 所示,设直线 BC 与⊙O 相切于点 D,连接 AO,OD,则 $AO=OD=\frac{1}{2}MN$.

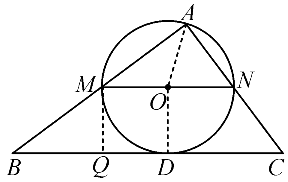


图 3-1-5

在 Rt△ABC 中,$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=5$.

由(1)知△AMN∽△ABC.

$\therefore \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$,即$\frac{x}{4}=\frac{MN}{5}$.

$\therefore MN=\frac{5}{4}x$,$\therefore OD=\frac{5}{8}x$.

过 M 点作 $MQ\perp BC$ 于 Q,则 $MQ=OD=\frac{5}{8}x$.

在 Rt△BMQ 与 Rt△BCA 中,∠B 是公共角,∴△BMQ∽△BCA.

$\therefore \frac{BM}{BC}=\frac{QM}{AC}$.

$\therefore BM=\frac{5\times\frac{5}{8}x}{3}=\frac{25}{24}x$,$AB=BM+MA=\frac{25}{24}x+x=4$.

$\therefore x=\frac{96}{49}$.

∴当 $x=\frac{96}{49}$时,⊙O 与直线 BC 相切.

(3)如图 3-1-6 所示,随点 M 的运动,当 P 点落在直线 BC 上时,连接 AP,则 O 点为 AP 的中点.

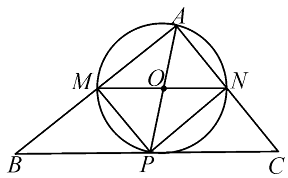


图 3-1-6

$\because MN/\!/BC$,

$\therefore \angle AMN=\angle B$,$\angle AOM=\angle APB$.

∴△AMO∽△ABP.

$\therefore \frac{AM}{AB}=\frac{AO}{AP}=\frac{1}{2}$,$AM=MB=2$.

故以下分两种情况讨论:

①当 $0<x\leqslant 2$ 时,$y=S_{\triangle PMN}=\frac{3}{8}x^2$.

∴当 $x=2$ 时,$y_{最大}=\frac{3}{8}\times 2^2=\frac{3}{2}$.

②当 $2<x<4$ 时,设 PM,PN 分别交 BC 于 E,F.如图 3-1-7 所示.

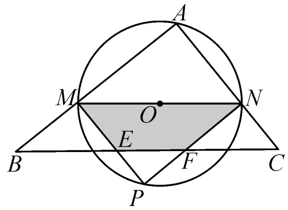


图 3-1-7

$\because$ 四边形 $AMPN$ 是矩形，

$\therefore PN /\!/ AM, PN=AM=x$.

又 $\because MN /\!/ BC$，

$\therefore$ 四边形 $MBFN$ 是平行四边形.

$\therefore FN=BM=4-x$.

$\therefore PF=x-(4-x)=2x-4$.

又 $\triangle PEF \backsim \triangle ACB$.

$\therefore \left(\dfrac{PF}{AB}\right)^2=\dfrac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle ABC}}$.

$\therefore S_{\triangle PEF}=\dfrac{3}{2}(x-2)^2$.

$y=S_{\triangle MNP}-S_{\triangle PEF}=\dfrac{3}{8}x^2-\dfrac{3}{2}(x-2)^2=-\dfrac{9}{8}x^2+6x-6$.

当 $2<x<4$ 时，$y=-\dfrac{9}{8}x^2+6x-6=-\dfrac{9}{8}\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2+2$.

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{8}{3}$ 时，满足 $2<x<4$，$y_{最大}=2$.

综上所述，当 $x=\dfrac{8}{3}$ 时，y 值最大，最大值是 2.

大显身手

【习题 14】如图 3-1-8 所示，直角梯形 $OABC$ 的顶点 A、C 分别在 y 轴正半轴与 x 轴负半轴上．过点 B、C 作直线 l，将直线 l 平移，平移后的直线 l 与 x 轴交于点 D，与 y 轴交于点 E．

(1)将直线 l 向右平移，设平移距离 CD 为 $t(t\geqslant 0)$，直角梯形 $OABC$ 被直线 l 扫过的面积(图中阴影部份)为 s，s 关于 t 的函数图像如图 3-1-9 所示，OM 为线段，MN 为抛物线的一部分，NQ 为射线，N 点横坐标为 4．

①求梯形上底 AB 的长及直角梯形 $OABC$ 的面积；

②当 $2<t<4$ 时，求 S 关于 t 的函数解析式；

(2)在第(1)题的条件下，当直线 l 向左或向右平移时(包括 l 与直线 BC 重合)，在直线 AB 上是否存在点 P，使△PDE 为等腰直角三角形？若存在，请直接写出所有满足条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

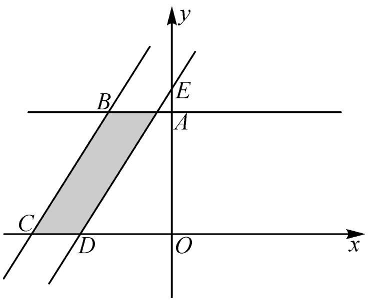


图 3-1-8

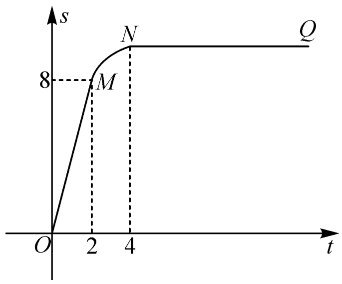


图 3-1-9

3.2 图形的平移

【例 17】如图 3-2-1 所示，四边形 $OABC$ 的边 OA、OC 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，顶点在 B 点的抛物线交 x 轴于点 A、D，交 y 轴于点 E，连接 AB、AE、BE. 已知 $\tan\angle CBE=\frac{1}{3}$，$A(3,0)$，$D(-1,0)$，$E(0,3)$.

(1)求抛物线的解析式及顶点 B 的坐标；

(2)求证：CB 是△ABE 外接圆的切线；

(3)试探究坐标轴上是否存在一点 P，使以 D、E、P 为顶点的三角形与△ABE 相似？若存在，直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

(4)设△AOE 沿 x 轴正方向平移 t 个单位长度 $(0<t\leqslant3)$ 时，△AOE 与△ABE 重叠部分的面积为 S，求 S 与 t 之间的函数关系式，并指出 t 的取值范围.

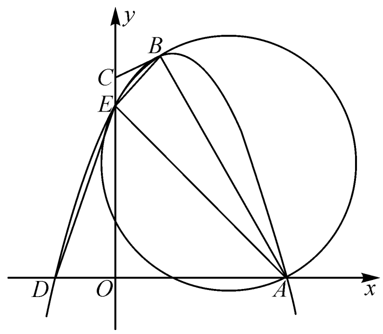


图 3-2-1

突破分析

(1)运用待定系数法即可求解析式，进而求得点 B 坐标.

(2)通过边角关系可求得△ABE 为 Rt△，进而只需求证 $\angle CBA=90^\circ$ 即可.

(3)由(1)可知△ABE 为 Rt△，可运用“一圆两垂直”构造 Rt△，再检验相似即可.

(4)最重要是画出图形，则可以看出我们需要分两种情况，而 $\angle EAO=45^\circ$，$\tan\angle BAO=2$ 从而利用这两个三角函数可求出各个面积的直角边(用 t 表示).

解析

(1)由题意，设抛物线解析式为 $y=a(x-3)(x+1)$.

将 $E(0,3)$ 代入上式，解得：$a=-1$.

$\therefore y=-x^2+2x+3$，则点 $B(1,4)$.

(2)证明：如图 3-2-2 所示，过点 B 作 $BM\perp y$ 于点 M，则 $M(0,4)$.

在 Rt△AOE 中，$OA=OE=3$，

$\therefore \angle1=\angle2=45^\circ$，$AE=\sqrt{OA^2+OE^2}=3\sqrt{2}$.

在 Rt△EMB 中，$EM=OM-OE=1=BM$，

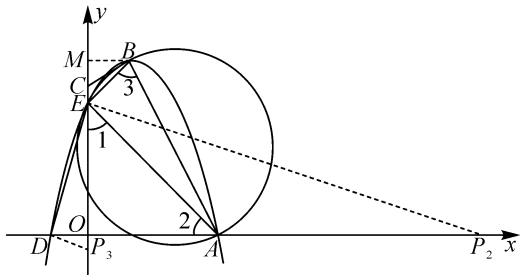


图 3-2-2

$\therefore \angle MEB=\angle MBE=45°$,

$BE=\sqrt{EM^2+BM^2}=\sqrt{2}$.

$\therefore \angle BEA=180°-\angle 1-\angle MEB=90°$.

$\therefore AB$ 是 $\triangle ABE$ 外接圆的直径.

在 $Rt\triangle ABE$ 中,

$\tan\angle BAE=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{1}{3}=\tan\angle CBE$,

$\therefore \angle BAE=\angle CBE$.

在 $Rt\triangle ABE$ 中,$\angle BAE+\angle 3=90°$,$\therefore \angle CBE+\angle 3=90°$.

$\therefore \angle CBA=90°$,即 $CB\perp AB$. $\therefore CB$ 是 $\triangle ABE$ 外接圆的切线.

(3)解:$Rt\triangle ABE$ 中,$\angle AEB=90°$,$\tan\angle BAE=\dfrac{1}{3}$,$\sin\angle BAE=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,$\cos\angle BAE=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

若以 D、E、P 为顶点的三角形与 $\triangle ABE$ 相似,则 $\triangle DEP$ 必为直角三角形.

①DE 为斜边时,P_1 在 x 轴上,此时 P_1 与 O 重合.

由 $D(-1,0)$、$E(0,3)$,得 $OD=1$、$OE=3$,

即 $\tan\angle DEO=\dfrac{1}{3}=\tan\angle BAE$,即 $\angle DEO=\angle BAE$.

满足 $\triangle DEO\backsim\triangle BAE$ 的条件,

因此 O 点是符合条件的 P_1 点,坐标为 $(0,0)$.

②DE 为短直角边时,P_2 在 x 轴上;

若以 D、E、P 为顶点的三角形与 $\triangle ABE$ 相似,

则 $\angle DEP_2=\angle AEB=90°$,$\sin\angle DP_2E=\sin\angle BAE=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$;

而 $DE=\sqrt{10}$,则 $DP_2=DE\div\sin\angle DP_2E=\sqrt{10}\div\dfrac{\sqrt{10}}{10}=10$,

$OP_2=DP_2-OD=9$. 即:$P_2(9,0)$;

③DE 为长直角边时,点 P_3 在 y 轴上.

若以 D、E、P 为顶点的三角形与 $\triangle ABE$ 相似,

则 $\angle EDP_3=\angle AEB=90°$,$\cos\angle DEP_3=\cos\angle BAE=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$;

则 $EP_3=DE\div\cos\angle DEP_3=\sqrt{10}\div\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=\dfrac{10}{3}$,

$OP_3=EP_3-OE=\dfrac{1}{3}$.

综上,得:$P_1(0,0)$,$P_2(9,0)$,$P_3(0,-\dfrac{1}{3})$.

(4)设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$.

将 $A(3,0)$,$B(1,4)$代入,得$\begin{cases}3k+b=0,\\k+b=4.\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-2,\\b=6.\end{cases}$

$\therefore y=-2x+6$.

过点 E 作射线 $EF\parallel x$ 轴交 AB 于点 F,当 $y=3$ 时,得 $x=\dfrac{3}{2}$,

$\therefore F(\dfrac{3}{2},3)$.

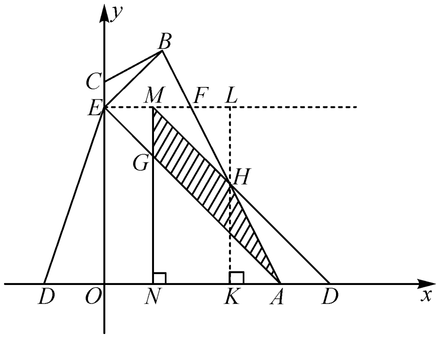


图 3-2-3

情况一:如图 3-2-3 所示,当 $0<t\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时,设$\triangle AOE$ 平移到$\triangle DNM$ 的位置,MD 交 AB 于点 H,MN 交 AE 于点G.则 $ON=AD=t$,过点 H 作 $LK\perp x$ 轴于点 K,交 EF 于点 L.由$\triangle AHD\backsim\triangle FHM$,得$\dfrac{AD}{FM}=\dfrac{HK}{HL}$,即$\dfrac{t}{\dfrac{3}{2}-t}=\dfrac{HK}{3-HK}$.

解得 $HK=2t$.

$\therefore S_{阴}=S_{\triangle MND}-S_{\triangle GNA}-S_{\triangle HAD}=\dfrac{1}{2}\times3\times3-\dfrac{1}{2}(3-t)^2-\dfrac{1}{2}t\cdot2t=-\dfrac{3}{2}t^2+3t$.

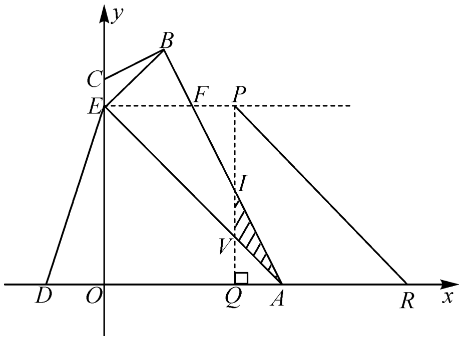


图 3-2-4

情况二:如图 3-2-4 所示,当 $\dfrac{3}{2}<t\leqslant3$ 时,设$\triangle AOE$ 平移到$\triangle PQR$ 的位置,PQ 交 AB 于点 I,交 AE 于点 V.

由$\triangle IQA\backsim\triangle IPF$,得$\dfrac{AQ}{FP}=\dfrac{IQ}{IP}$.

即$\dfrac{3-t}{t-\dfrac{3}{2}}=\dfrac{IQ}{3-IQ}$,

解得 $IQ=2(3-t)$.

$\therefore S_{阴}=S_{\triangle IQA}-S_{\triangle VQA}=\dfrac{1}{2}\times(3-t)\times2(3-t)-\dfrac{1}{2}(3-t)^2=\dfrac{1}{2}(3-t)^2=\dfrac{1}{2}t^2-3t+\dfrac{9}{2}$.

综上所述:$\begin{cases}-\dfrac{3}{2}t^2+3t,(0<t\leqslant\dfrac{3}{2})\\\dfrac{1}{2}t^2-3t+\dfrac{9}{2}.(\dfrac{3}{2}<t\leqslant3)\end{cases}$

大显身手

【习题 15】如图 3-2-5 所示，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 经过 $A(-3,0)$，$B(-1,0)$两点.

(1)求抛物线的解析式；

(2)设抛物线的顶点为 M，直线 $y=-2x+9$ 与 y 轴交于点 C，与直线 OM 交于点 D. 现将抛物线平移，保持顶点在直线 OD 上. 若平移的抛物线与射线 CD(含端点 C)只有一个公共点，求它的顶点横坐标的值或取值范围.

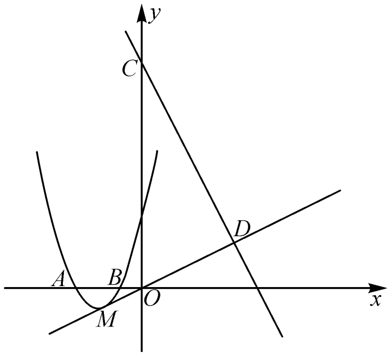


图 3-2-5

3.3 图形的翻转

【例 18】将一矩形纸片 $OABC$ 放在平面直角坐标系中，$O(0,0)$，$A(6,0)$，$C(0,3)$. 动点 Q 从点 O 出发以每秒 1 个单位长的速度沿 OC 向终点 C 运动，运动 $\frac{2}{3}$ 秒时，动点 P 从点 A 出发以相等的速度沿 AO 向终点 O 运动. 当其中一点到达终点时，另一点也停止运动. 设点 P 的运动时间为 t(秒).

(1)用含 t 的代数式表示 OP，OQ；

(2)当 $t=1$ 时，如图 3-3-1 所示，将△OPQ 沿 PQ 翻折，点 O 恰好落在 BC 边上的点 D 处，求点 D 的坐标；

(3)连接 AC，将△OPQ 沿 PQ 翻折，得到△EPQ，如图 3-3-2 所示. 问：PQ 与 AC 能否平行？PE 与 AC 能否垂直？若能，求出相应的 t 值；若不能，说明理由.

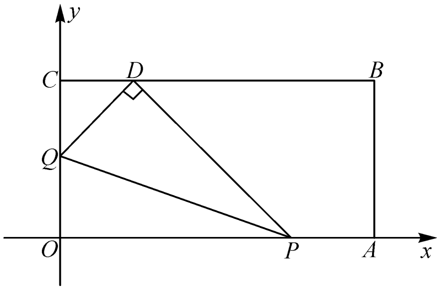


图 3-3-1

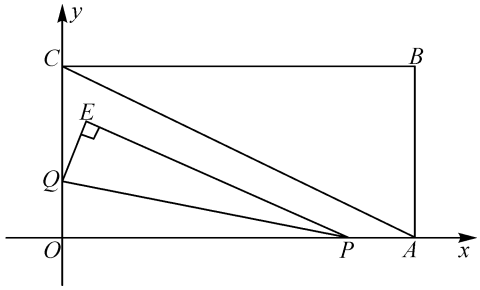


图 3-3-2

突破分析

(3)平行式容易证明，假设垂直成立的话，则 QE 与 AC 平行，延长 QE 则会有和(2)中类似的相似，△PEF∽△QOF∽△COF 可求出 t，但要注意，t 是有范围的.

解析

(1)$OP=6-t$，$OQ=t+\frac{2}{3}$.

(2)当 $t=1$ 时，过点 D 作 $DD_1\perp OA$，交 OA 于 D_1，如图 3-3-3 所示，则 $DQ=QO=\frac{5}{3}$，$QC=\frac{4}{3}$，∴$CD=1$，∴$D(1,3)$.

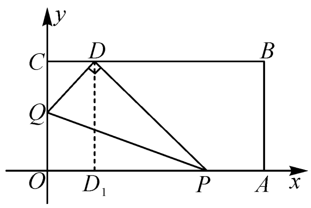


图 3-3-3

(3)①PQ 能与 AC 平行.

若 $PQ/\!/AC$，如图 3-3-4 所示，则 $\frac{OP}{OQ}=\frac{OA}{OC}$，

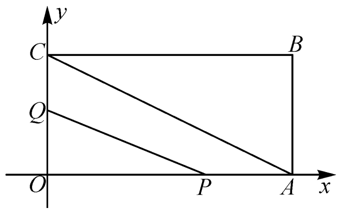


图 3-3-4

即$\dfrac{6-t}{t+\dfrac{2}{3}}$，∴$t=\dfrac{14}{9}$，而 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{7}{3}$，∴$t=\dfrac{14}{9}$.

②PE 不能与 AC 垂直.

若 $PE\perp AC$，延长 QE 交 OA 于 F，如图 3-3-5 所示，

则$\dfrac{QF}{AC}=\dfrac{OQ}{OC}$∴$\dfrac{QF}{3\sqrt{5}}=\dfrac{t+\dfrac{2}{3}}{3}$.

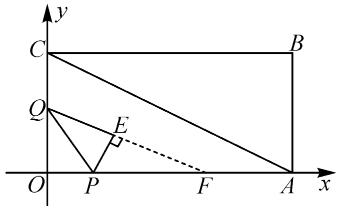


图 3-3-5

∴$QF=\sqrt{5}\left(t+\dfrac{2}{3}\right)-\left(t+\dfrac{2}{3}\right).=(\sqrt{5}-1)t+\dfrac{2}{3}(\sqrt{5}-1)$.

又∵Rt△PEF∽Rt△OCA，∴$\dfrac{PE}{EF}=\dfrac{OC}{OA}$，

∴$\dfrac{6-t}{(\sqrt{5}-1)\left(t+\dfrac{2}{3}\right)}=\dfrac{3}{6}$，∴$t\approx3.45$，而 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{7}{3}$. ∴$t$ 不存在.

大显身手

【习题 16】已知直角梯形纸片 $OABC$ 在平面直角坐标系中的位置如图 3-3-6 所示，四个顶点的坐标分别为 $O(0,0)$，$A(10,0)$，$B(8,2\sqrt{3})$，$C(0,2\sqrt{3})$，点 T 在线段 OA 上(不与线段端点重合)，将纸片折叠，使点 A 落在射线 AB 上(记为点 A')，折痕经过点 T，折痕 TP 与射线 AB 交于点 P，设点 T 的横坐标为 t，折叠后纸片重叠部分(图 3-3-7 中的阴影部分)的面积为 S；

(1)求$\angle OAB$ 的度数，并求当点 A'在线段 AB 上时，S 关于 t 的函数关系式；

(2)当纸片重叠部分的图形是四边形时，求 t 的取值范围；

(3)S 存在最大值吗？若存在，求出这个最大值，并求此时 t 的值；若不存在，请说明理由.

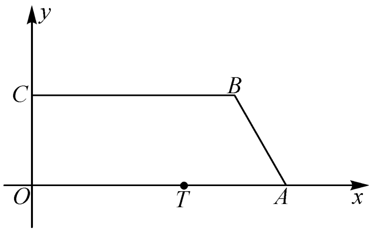


图 3-3-6

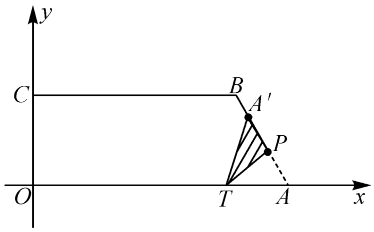


图 3-3-7

3.4 图形的旋转

【例19】在平面直角坐标系 xOy 中，如图3-4-1所示，将 n 个边长为1的正方形并排组成矩形 $OABC$，相邻两边 OA 和 OC 分别落在 x 轴和 y 轴的正半轴上，设抛物线 $y=ax^2+bx+c(a<0)$ 过矩形顶点 B、C.

(1)当 $n=1$ 时，如果 $a=-1$，试求 b 的值；

(2)当 $n=2$ 时，如图3-4-2所示，在矩形 $OABC$ 上方作一边长为1的正方形 $EFMN$，使 EF 在线段 CB 上，如果 M，N 两点也在抛物线上，求出此时抛物线的解析式；

(3)将矩形 $OABC$ 绕点 O 顺时针旋转，使得点 B 落到 x 轴的正半轴上，如果该抛物线同时经过原点 O. 如图3-4-3所示.

①试求出当 $n=3$ 时 a 的值；

②直接写出 a 关于 n 的关系式.

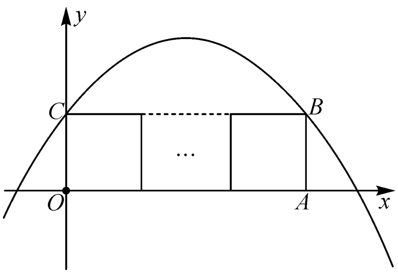


图3-4-1

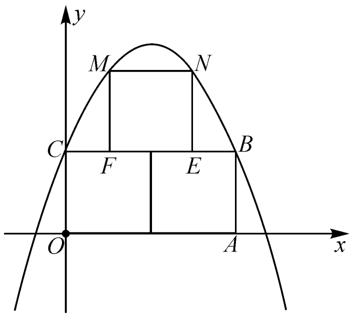


图3-4-2

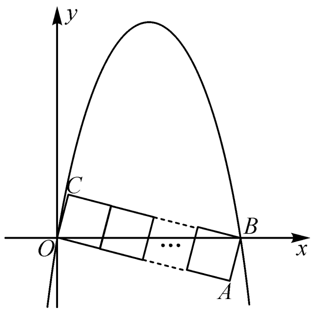


图3-4-3

突破分析

(1)利用抛物线和正方形的对称性即可求解.

(2)由题意，可得 B、C、M 三点坐标，再用待定数法求解即可.

(3)①$c=0$，由题意 $\tan\angle COB=\dfrac{1}{3}$ 又 $OC=1$，∴可以求出 C 的坐标，线段 OB 利用勾股定理求解即可.

②$\tan\angle COB=\dfrac{1}{n}$，$OC=1$，用 n 可以表示出 C 的坐标，再表示出 B 的坐标，代入二次函数，即可就出 n 和 a 的关系了.

解析

(1)由题意可知，抛物线对称轴为直线 $x=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore -\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2}$，得 $b=1$.

(2)如图 3-4-4 所示，设所求抛物线解析式为 $y=ax^2+bx+1$，

由对称性可知抛物线经过点 $B(2,1)$ 和点 $M(\dfrac{1}{2},2)$.

$\therefore \begin{cases}1=4a+2b+1,\\ 2=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{2}b+1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{4}{3},\\ b=\dfrac{8}{3}.\end{cases}$

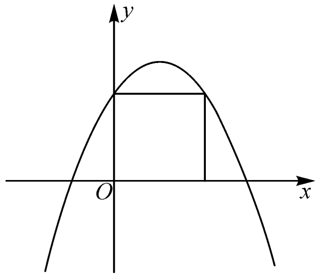


图 3-4-4

$\therefore$ 所求抛物线解析式为 $y=-\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x+1$.

(3)如图 3-4-5 所示，①当 $n=3$ 时，$OC=1$，$BC=3$，设所求抛物线解析式为 $y=ax^2+bx$，

过 C 作 $CD\perp OB$ 于点 D，则 $\text{Rt}\triangle OCD\backsim\text{Rt}\triangle CBD$，

$\therefore \dfrac{OD}{CD}=\dfrac{OC}{BC}=\dfrac{1}{3}$，

设 $OD=t$，则 $CD=3t$，

$\because OD^2+CD^2=OC^2$，$\therefore (3t)^2+t^2=1^2$，$\therefore t=\sqrt{\dfrac{1}{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore C(\dfrac{\sqrt{10}}{10},\dfrac{3}{10}\sqrt{10})$，又 $B(\sqrt{10},0)$，

$\therefore$ 把 B、C 坐标代入抛物线解析式，得

$\begin{cases}0=10a+\sqrt{10}b,\\ \dfrac{3}{10}\sqrt{10}=\dfrac{1}{10}a+\dfrac{\sqrt{10}}{10}b.\end{cases}$ 解得：$a=-\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

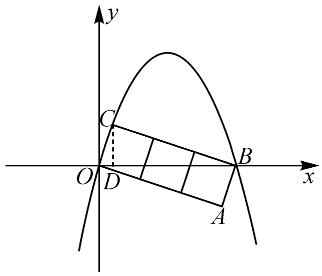


图 3-4-5

②$a=-\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$.

大显身手

【习题 17】平面直角坐标系中，▱$ABOC$ 按图 3-4-6 所示放置，点 A、C 的坐标分别为(0,3)、(−1,0)，将此平行四边形绕点 O 顺时针旋转 90°，得到▱$A'B'OC'$.

(1)若抛物线过点 C,A,A'，求此抛物线的解析式；

(2)求▱$ABOC$ 和▱$A'B'OC'$重叠部分△$OC'D$ 的周长；

(3)点 M 是第一象限内抛物线上的一动点，问：点 M 在何处时△AMA'的面积最大？最大面积是多少？并求出此时点 M 的坐标.

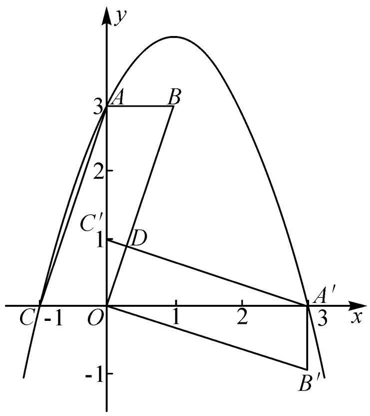


图 3-4-6

第四章　动态产生的函数

【例 20】如图 4-1-1 所示，在直角坐标系中，梯形 $ABCD$ 的底边 AB 在 x 轴上，底边 CD 的端点 D 在 y 轴上. 直线 CB 的表达式为 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$，点 A、点 D 的坐标分别为 $(-4,0)$，$(0,4)$. 动点 P 自 A 点出发，在 AB 上匀速运行. 动点 Q 自点 B 出发，在折线 BCD 上匀速运行，速度均为每秒 1 个单位. 当其中一个动点到达终点时，它们同时停止运动. 设点 P 运动 t（秒）时，$\triangle OPQ$ 的面积为 S（不能构成 $\triangle OPQ$ 的动点除外）.

(1)求出点 B、C 的坐标；

(2)求 S 随 t 变化的函数关系式；

(3)当 t 为何值时 S 有最大值？并求出最大值.

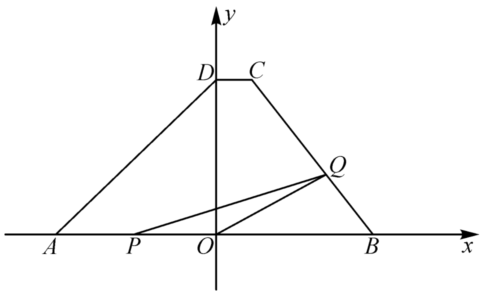


图 4-1-1

突破分析

(2)此问考查在临界点的讨论，P、Q 最多能运动 6 秒，分三段讨论即可.

(3)先分段求出最值，再综合比较，但要注意每段自变量的取值范围.

解析

(1)把 $y=4$ 代入 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$，得 $x=1$.

∴C 点的坐标为 $(1,4)$.

当 $y=0$ 时，$-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}=0$，

∴$x=4$. ∴点 B 坐标为 $(4,0)$.

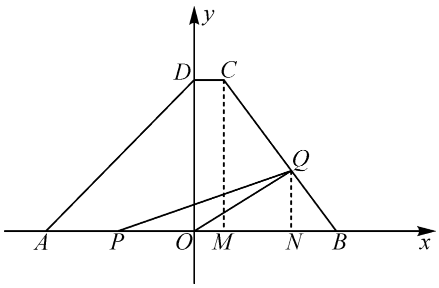


图 4-1-2

(2)如图 4-1-2 所示，作 $CM\perp AB$ 于 M，则 $CM=4$，$BM=3$.

∴$BC=\sqrt{CM^2+BM^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

$\therefore \sin\angle ABC=\dfrac{CM}{BC}=\dfrac{4}{5}$.

①当 $0<t<4$ 时，作 $QN\perp OB$ 于 N，

则 $QN=BQ\cdot\sin\angle ABC=\dfrac{4}{5}t$.

$\therefore S=\dfrac{1}{2}OP\cdot QN=\dfrac{1}{2}(4-t)\times\dfrac{4}{5}t=-\dfrac{2}{5}t^2+\dfrac{8}{5}t(0<t<4)$.

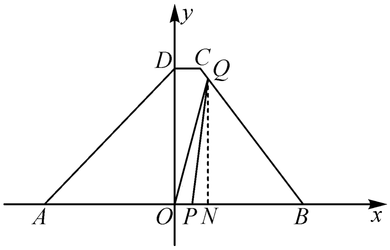


图 4-1-3

②当 $4<t\leqslant 5$ 时，(如图 4-1-3 所示)，

连接 QO，QP，作 $QN\perp OB$ 于 N.

同理可得 $QN=\dfrac{4}{5}t$.

$\therefore S=\dfrac{1}{2}OP\cdot QN=\dfrac{1}{2}\times(t-4)\times\dfrac{4}{5}t=\dfrac{2}{5}t^2-\dfrac{8}{5}t(4<t\leqslant 5)$.

③当 $5<t\leqslant 6$ 时，(如图 4-1-4 所示)，

连接 QO，QP.

$S=\dfrac{1}{2}\times OP\times OD=\dfrac{1}{2}(t-4)\times 4=2t-8(5<t\leqslant 6)$.

(3)①在 $0<t<4$ 时，

当 $t=\dfrac{\frac{8}{5}}{2\times\left|-\frac{2}{5}\right|}=2$ 时，

$S_{最大}=\dfrac{-\left(\frac{8}{5}\right)^2}{4\times\left(-\frac{2}{5}\right)}=\dfrac{8}{5}$.

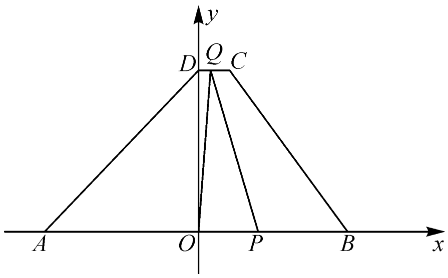


图 4-1-4

②在 $4<t\leqslant 5$ 时，对于抛物线 $S=\dfrac{2}{5}t^2-\dfrac{8}{5}t$，当 $t=-\dfrac{-\frac{8}{5}}{2\times\frac{2}{5}}=2$ 时，

$S_{最小}=\dfrac{2}{5}\times 2^2-\dfrac{8}{5}\times 2=-\dfrac{8}{5}$.

$\therefore$ 抛物线 $S=\dfrac{2}{5}t^2-\dfrac{8}{5}t$ 的顶点为 $\left(2,-\dfrac{8}{5}\right)$.

$\therefore$ 在 $4<t\leqslant 5$ 时，S 随 t 的增大而增大.

$\therefore$ 当 $t=5$ 时，$S_{最大}=\dfrac{2}{5}\times 5^2-\dfrac{8}{5}\times 5=2$.

③在 $5<t\leqslant 6$ 时，

在 $S=2t-8$ 中，

$\because 2>0$，

$\therefore S$ 随 t 的增大而增大.

$\therefore$ 当 $t=6$ 时，$S_{最大}=2\times6-8=4$.

$\therefore$ 综合三种情况，当 $t=6$ 时，S 取得最大值，最大值是 4.

（说明：(3)中的②也可以省略，但需要说明：在(2)中的②与③的$\triangle OPQ$，③中的底边 OP 和高 CD 都大于②中的底边 OP 和高. $\therefore$ ③中的$\triangle OPQ$面积一定大于②中的$\triangle OPQ$的面积.）

大显身手

【习题 18】如图 4-1-5 所示，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 AB 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，且 $OA=3$，$AB=5$. 点 P 从点 O 出发沿 OA 以每秒 1 个单位长的速度向点 A 匀速运动，到达点 A 后立刻以原来的速度沿 AO 返回；点 Q 从点 A 出发沿 AB 以每秒 1 个单位长的速度向点 B 匀速运动. 伴随着 P、Q 的运动，DE 保持垂直平分 PQ，且交 PQ 于点 D，交折线 $QB-BO-OP$ 于点 E. 点 P、Q 同时出发，当点 Q 到达点 B 时停止运动，点 P 也随之停止. 设点 P、Q 运动的时间是 t 秒($t>0$).

(1)求直线 AB 的解析式；

(2)在点 P 从 O 向 A 运动的过程中，求$\triangle APQ$ 的面积 S 与 t 之间的函数关系式(不必写出 t 的取值范围)；

(3)在点 E 从 B 向 O 运动的过程中，完成下面问题：

①四边形 $QBED$ 能否成为直角梯形？若能，请求出 t 的值；若不能，请说明理由.

②当 DE 经过点 O 时，请你直接写出 t 的值.

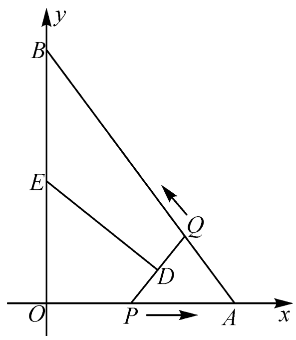


图 4-1-5

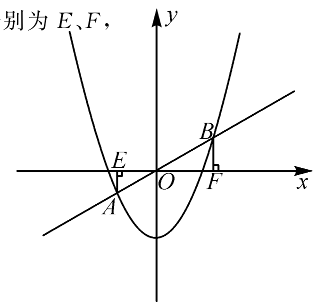
习题参考答案

【习题 1】解：(1)∵抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2-6$ 与直线 $y=\frac{1}{2}x$ 相交于 A、B 两点．

∴$A(-4,-2)$，$B(6,3)$

如图答 1 所示，分别过 A、B 两点作 $AE\perp x$ 轴，$BF\perp y$ 轴，垂足分别为 E、F，

∴$AB=OA+OB=\sqrt{4^2+2^2}+\sqrt{6^2+3^2}=5\sqrt{5}$．



图答 1

(2)设扇形的半径为 x，则弧长为$(5\sqrt{5}-2x)$，扇形的面积为 y，

则 $y=\frac{1}{2}x(5\sqrt{5}-2x)=-x^2+\frac{5}{2}\sqrt{5}x=-\left(x-\frac{5\sqrt{5}}{4}\right)^2+\frac{125}{16}$，

∵$-1<0$．

∴当 $x=\frac{5\sqrt{5}}{4}$时，函数有最大值 $y_{最大}=\frac{125}{16}$．

(3)如图答 2 所示，过点 A 作 $AE\perp x$ 轴，垂足为点 E，

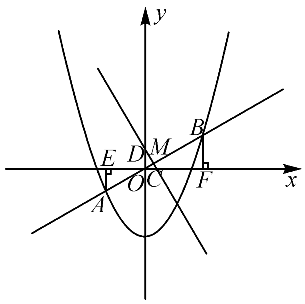
∵CD 垂直平分 AB，点 M 为垂足，

∴$OM=\frac{1}{2}AB-OA=\frac{5\sqrt{5}}{2}-2\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}$．

∵$\angle AEO=\angle OMC$，$\angle EOA=\angle COM$，

∴$\triangle AEO\backsim\triangle CMO$．

∴$\frac{OE}{OM}=\frac{AO}{CO}$．∴$\frac{4}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{CO}$．∴$CO=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$．



图答 2

同理可得 $OD=\frac{5}{2}$．

∴$\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OD^2}=\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$．

又∵$\frac{1}{OM^2}=\frac{4}{5}$．

∴$\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OD^2}=\frac{1}{OM^2}$．

(4)等式$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$成立．

要证$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$，

即证$\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}=\frac{1}{h^2}$，

即$\frac{c^2}{a^2b^2}=\frac{1}{h^2}$，

即 $a^2b^2=c^2h^2$，

即 $ab=ch$，

又∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch$，

且以上每步皆可逆，

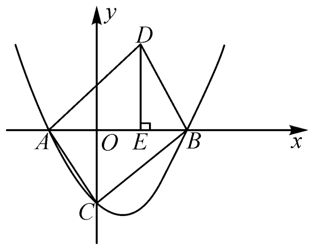
∴$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$.

【习题 2】解：(1)∵抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-x+a$ 的顶点坐标为$(1,a-\frac{1}{2})$，

代入直线方程 $y=-2x$，得 $a=-\frac{3}{2}$；

(2)二次函数的关系式为 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$，当 $y=0$ 时，$\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}=0$，解之得：$x_1=-1$，$x_2=3$，即 $A(-1,0)$，$B(3,0)$；

(3)如图答 3 所示，作 $DE\perp x$ 轴于 E，易证$\triangle AED\cong\triangle BOC$，



图答 3

∴$AE=BO=3$，$DE=CO=\frac{3}{2}$.

又∵$AO=1$，∴$EO=2$.

∴$D\left(2,\frac{3}{2}\right)$.

则点 D 关于 x 轴的对称点 D' 是$\left(2,-\frac{3}{2}\right)$.

代入 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$成立，

∴D'在二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$的图像上.

【习题 3】解：(1)设抛物线的解析式为 $y=a(x-1)^2-3$.

将 $A(-1,0)$代入：$0=a(-1-1)^2-3$，解得 $a=\frac{3}{4}$.

∴抛物线的解析式为 $y=\frac{3}{4}(x-1)^2-3$，即 $y=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$.

(2)是定值，$\frac{PM}{BE}+\frac{PN}{AD}=1$，

∵AB 为直径，

∴$\angle AEB=90°$.

∵$PM\perp AE$，

∴$PM/\!/BE$，

∴$\triangle APM\backsim\triangle ABE$，

∴$\frac{PM}{BE}=\frac{AP}{AB}$. ①

同理：$\frac{PN}{AD}=\frac{PB}{AB}$. ②

①+②：$\dfrac{PM}{BE}+\dfrac{PN}{AD}=\dfrac{AP}{AB}+\dfrac{PB}{AB}=1$.

(3)方法一：

$\triangle EFG\backsim\triangle MPE$，故$\dfrac{EF}{EG}=\dfrac{MP}{ME}$，

又∵PM平行于BE，

∴$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{AM}{ME}$，抛物线对称轴垂直平分$AB$，故$AE=BE$，$\angle AEB=90°$，

∴$\angle EAB=\angle EBA=45°$，故$AM=MP$，

∴$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{AM}{ME}=\dfrac{MP}{ME}=\dfrac{EF}{EG}$.

方法二：

∵直线EC为抛物线对称轴，

∴EC垂直平分AB，

∴$EA=EB$，

∵$\angle AEB=90°$，

∴$\triangle AEB$为等腰直角三角形，

∴$\angle EAB=\angle EBA=45°$.

如图答4所示，过点P作$PH\perp BE$与H，

由已知及作法可知，四边形$PHEM$是矩形.

∴$PH=ME$且$PH/\!/ME$.

在$\triangle APM$和$\triangle PBH$中，

∵$\angle AMP=\angle PHB=90°$，$\angle EAB=\angle BPH=45°$，

∴$PH=BH$，且$\triangle APM\backsim\triangle PBH$，

∴$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PM}{PH}=\dfrac{PM}{ME}$①

在$\triangle MEP$和$\triangle EGF$中.

∵$PE\perp FG$，

∴$\angle FGE+\angle SEG=90°$.

∵$\angle MEP+\angle SEG=90°$，

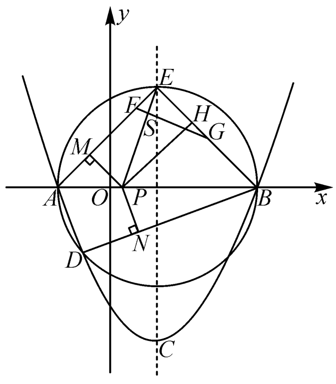
∴$\angle FGE=\angle MEP$.

∵$\angle PME=\angle FEG=90°$，

∴$\triangle MEP\backsim\triangle EGF$，

∴$\dfrac{PM}{ME}=\dfrac{EF}{EG}$.②

由①、②知：$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{EF}{EG}$.



图答4

【习题4】解：(1)设抛物线的解析式为$y=kx^2+a$，

∵点$(2a,2a)$在抛物线上，$4a^2k+a=2a$，

∴$k=\dfrac{1}{4a}$，

$\therefore$抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{4a}x^2+a$.

(2)设抛物线上一点 $P(x,y)$,过 P 作 $PH\perp x$ 轴,$PG\perp y$ 轴,在 Rt$\triangle GDP$ 中,由勾股定理得:

$PD^2=DG^2+PG^2=(y-2a)^2+x^2=y^2-4ay+4a^2+x^2$.

$\because y=\frac{1}{4a}x^2+a$,

$\therefore x^2=4a\times(y-a)=4ay-4a^2$,

$\therefore PD^2=y^2-4ay+4a^2+4ay-4a^2=y^2=PH^2$,

$\therefore PD=PH$.

(3)过 B 点 $BE\perp x$ 轴,$AF\perp y$ 轴,

由(2)的结论:$BE=DB$,$AF=DA$,

$\because DA=2DB$,

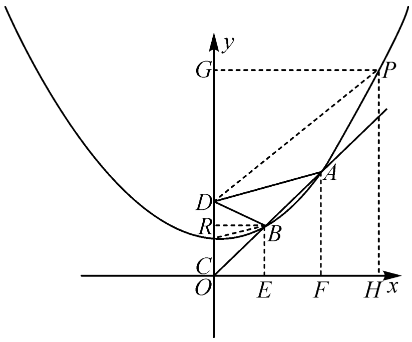
$\therefore AF=2BE$,

$\therefore AO=2BO$,

$\therefore B$ 是 OA 的中点.

$\because C$ 是 OD 的中点,

如图答 5 所示,连接 BC,



图答 5

$\therefore BC=\frac{DA}{2}=\frac{AF}{2}=BE=DB$.

过 B 作 $BR\perp y$ 轴,

$\because BR\perp CD$,

$\therefore CR=DR$,$OR=a+\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}$,

$\therefore B$ 点的纵坐标是$\frac{3a}{2}$,又点 B 在抛物线上,

$\therefore \frac{3a}{2}=\frac{1}{4a}x^2+a$,

$\therefore x^2=2a^2$.

$\because x>0$,

$\therefore x=\sqrt{2}a$,

$\therefore B\left(\sqrt{2}a,\frac{3a}{2}\right)$,

$AO=2OB$,

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle OBD}=4\sqrt{2}$,

$\therefore \frac{1}{2}\times 2a\times\sqrt{2}a=4\sqrt{2}$,

$\therefore a^2=4$.

$\because a>0$,

$\therefore a=2$.

【习题 5】解：(1)$A(-m,0)$，$B(3m,0)$，$D(0,\sqrt{3}m)$.

(2)设直线 ED 的解析式为 $y=kx+b$，将 $E(-3,0)$、$D(0,\sqrt{3}m)$代入，得$\begin{cases}-3k+b=0,\\ b=\sqrt{3}m.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}m,\\ b=\sqrt{3}m.\end{cases}$

∴直线 ED 的解析式为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}mx+\sqrt{3}m$.

∵ $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3m}(x+m)(x-3m)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3m}(x-m)^2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}m$，

∴顶点 M 的坐标为$\left(m,\dfrac{4\sqrt{3}}{3}m\right)$.

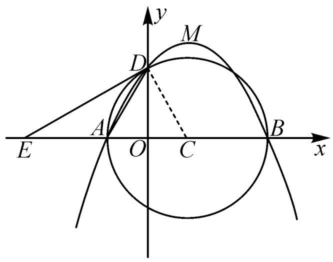
把$\left(m,\dfrac{4\sqrt{3}}{3}m\right)$代入 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}mx+\sqrt{3}m$，得 $m^2=m$.

∵ $m>0$，

∴ $m=1$.

∴当 $m=1$ 时，点 M 在直线 DE 上.

如图答 6 所示，连接 CD，C 为 AB 中点，C 点坐标为 $C(m,0)$.



图答 6

∵ $OD=\sqrt{3}$，$OC=1$，

∴ $CD=2$，点 D 在圆上.

又∵ $OE=3$，$DE^2=OD^2+OE^2=12$，$EC^2=16$，$CD^2=4$，

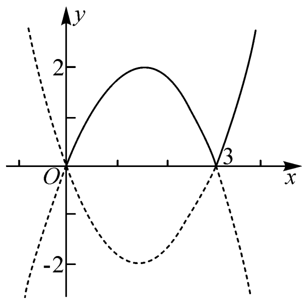
∴ $CD^2+DE^2=EC^2$.

∴ $\angle EDC=90°$，

∴直线 ED 与⊙C 相切.

(3)当 $0<m<3$ 时，$S_{\triangle AED}=\dfrac{1}{2}AE\cdot OD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}m(3-m)$，即 $S=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}m^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}m$.

当 $m>3$ 时，$S_{\triangle AED}=\dfrac{1}{2}AE\cdot OD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}m(m-3)$，即 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}m^2-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}m$. 图像示意图如图答 7 中的实线部分.



图答 7

【习题 6】分析：1. 第(3)题是典型的"将军饮马"问题，当 H 落在线段 EC 上时，$BH+EH$ 最小.

2. 第(4)题的解题策略是：先分两种情况画直线 BF，作$\angle CBF=\angle EBC=45°$，或者作 $BF\parallel EC$. 再用含 m 的式子表示点 F 的坐标. 然后根据夹角相等，两边对应成比例列关于 m 的方程.

解：(1)将 $M(2,2)$代入 $y=-\dfrac{1}{m}(x+2)(x-m)$，得 $2=-\dfrac{1}{m}\times 4(2-m)$. 解得 $m=4$.

(2)当 $m=4$ 时，$y=-\dfrac{1}{4}(x+2)(x-4)=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x+2$. ∴ $C(4,0)$，$E(0,2)$.

∴ $S_{\triangle BCE}=\dfrac{1}{2}BC\cdot OE=\dfrac{1}{2}\times 6\times 2=6$.

(3)如图答 8 所示，抛物线的对称轴是直线 $x=1$，当 H 落在线段 EC 上时，$BH+EH$ 最小.

设对称轴与 x 轴的交点为 P，那么$\dfrac{HP}{CP}=\dfrac{EO}{CO}$.

因此$\dfrac{HP}{3}=\dfrac{2}{4}$. 解得 $HP=\dfrac{3}{2}$. ∴点 H 的坐标为$\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

(4)①如图答 9 所示，过点 B 作 EC 的平行线交抛物线于 F，过点 F 作 $FF'\perp x$ 轴于 F'.

∵$\angle BCE=\angle FBC$，

∴当$\dfrac{CE}{CB}=\dfrac{BC}{BF}$，即 $BC^2=CE\cdot BF$ 时，$\triangle BCE\backsim\triangle FBC$.

设点 F 的坐标为$\left(x,-\dfrac{1}{m}(x+2)(x-m)\right)$，由$\dfrac{FF'}{BF'}=\dfrac{EO}{CO}$，得$\dfrac{\frac{1}{m}(x+2)(x-m)}{x+2}=\dfrac{2}{m}$.

解得 $x=m+2$.

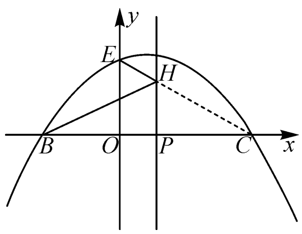
∴$F'(m+2,0)$.

由$\dfrac{CO}{CE}=\dfrac{BF'}{BF}$，得$\dfrac{m}{\sqrt{m^2+4}}=\dfrac{m+4}{BF}$.

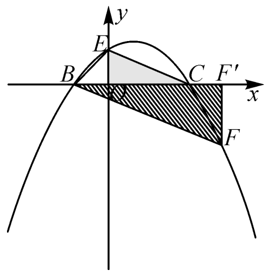
∴$BF=\dfrac{(m+4)\sqrt{m^2+4}}{m}$.

由 $BC^2=CE\cdot BF$，得$(m+2)^2=\sqrt{m^2+4}\times\dfrac{(m+4)\sqrt{m^2+4}}{m}$.

整理，得 $0=16$. 此方程无解.



图答 8



图答 9

②如图答 10 所示，作$\angle CBF=45°$交抛物线于 F，过点 F 作 $FF'\perp x$ 轴于 F'，

∵$\angle EBC=\angle CBF$，

∴$\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{BC}{BF}$，即 $BC^2=BE\cdot BF$ 时，$\triangle BCE\backsim\triangle BFC$.

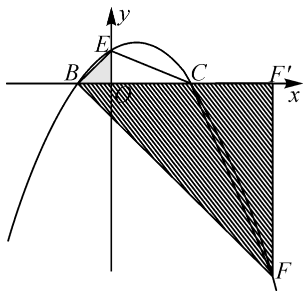
在 Rt$\triangle BFF'$中，由 $FF'=BF'$，得$\dfrac{1}{m}(x+2)(x-m)=x+2$.

解得 $x=2m$.

∴$F'(2m,0)$.

∴$BF'=2m+2$，$BF=\sqrt{2}(2m+2)$.

由 $BC^2=BE\cdot BF$，得$(m+2)^2=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}(2m+2)$. 解得 $m=2\pm2\sqrt{2}$.



图答 10

综合①、②，符合题意的 m 为 $2+2\sqrt{2}$.

【习题 7】分析：(2)中求不规则四边形的面积，我们一般想到用特殊图形做和差的方法去解决，这个题用此方法当然可以解决，但是这个方法会大大的增加我们的计算量和错误率，而本题中的四边形也可以看成一个规则的四边形：对角线互相垂直的四边形面积等于对角线乘积的一半.

解：(1)∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle A=\angle B=\angle D=90°$，$AD=AB$.

∵$QE\perp AB$，$MF\perp BC$，

∴$\angle AEQ=\angle MFB=90°$∴四边形 $ABFM$、$AEQD$ 都是矩形，

∴$MF=AB$，$QE=AD$，$MF\perp QE$.

又∵$PQ\perp MN$，

∴$\angle EQP=\angle FMN$.

又∵$\angle QEP=\angle MFN=90°$，∴$\triangle PEQ\cong\triangle NFM$.

(2)∵点 P 是边 AB 的中点，$AB=2$，$DQ=AE=t$，

∴$PA=1$，$PE=1-t$，$QE=2$.

由勾股定理，得 $PQ=\sqrt{QE^2+PE^2}=\sqrt{(1-t)^2+4}$.

∵$\triangle PEQ\cong\triangle NFM$，

∴$MN=PQ=\sqrt{(1-t)^2+4}$.

又∵$PQ\perp MN$，

∴$S=\frac{1}{2}PQ\cdot MN=\frac{1}{2}[(1-t)^2+4]=\frac{1}{2}t^2-t+\frac{5}{2}$.

∵$0\leqslant t\leqslant 2$，

∴当 $t=1$ 时，$S_{最小值}=2$.

综上：$S=\frac{1}{2}t^2-t+\frac{5}{2}$，$S$ 的最小值为 2.

【习题 8】解：(1)解：由题意可得 $M(0,2)$，$N(-3,2)$，

$$\therefore\begin{cases}2=c,\\2=9a-3b+c,\\0=9a+3b+c,\end{cases}$$

解得：$\begin{cases}a=-\frac{1}{9},\\b=-\frac{1}{3},\\c=2.\end{cases}$ ∴$y=-\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}x+2$.

(2)∵$PA=PC$，

∴P 为 AC 的垂直平分线上，依题意，AC 的垂直平分线经过$(-1,2)$，$(1,0)$所在的直线为 $y=-x+1$，

$$\begin{cases}y=-x+1,\\y=-\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}x+2,\end{cases}$$

解得：$\begin{cases}x_1=3+3\sqrt{2},\\ y_1=-2-3\sqrt{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3-3\sqrt{2},\\ y_2=-2+3\sqrt{2}.\end{cases}$ $\therefore P_1(3+3\sqrt{2},-2-3\sqrt{2}),P_2(3-3\sqrt{2},-2+3\sqrt{2})$.

(3) D 为 E 关于对称轴 $x=1.5$ 对称，

CD 所在的直线 $y=-x+3$，

$\therefore y_Q=4.5$，

$\therefore Q(-1.5.4.5)$，

$|QE-QC|$ 最大值为 $CD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

【习题 9】分析：1. 根据同底等高的三角形面积相等，平行线间的距离处处相等，可以知道符合条件的点 D 有两个.

2. 当直线 l 与以 AB 为直径的圆相交时，符合 $\angle AMB=90°$ 的点 M 有 2 个；当直线 l 与圆相切时，符合 $\angle AMB=90°$ 的点 M 只有 1 个.

3. 灵活应用相似比解题比较简便.

解：(1) 由 $y=-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x+3=-\frac{3}{8}(x+4)(x-2)$，

得抛物线与 x 轴的交点坐标为 $A(-4,0)$、$B(2,0)$.

对称轴是直线 $x=-1$.

(2) $\triangle ACD$ 与 $\triangle ACB$ 有公共的底边 AC，当 $\triangle ACD$ 的面积等于 $\triangle ACB$ 的面积时，

点 B、D 到直线 AC 的距离相等.

过点 B 作 AC 的平行线交抛物线的对称轴于点 D，在 AC 的另一侧有对应的点 D'.

如图答 11 所示，设抛物线的对称轴与 x 轴的交点为 G，与 AC 交于点 H.

由 $BD\parallel AC$，得 $\angle DBG=\angle CAO$.

$\therefore \frac{DG}{BG}=\frac{CO}{AO}=\frac{3}{4}$.

$\therefore DG=\frac{3}{4}BG=\frac{9}{4}$，点 D 的坐标为 $\left(1,-\frac{9}{4}\right)$.

$\because AC\parallel BD, AG=BG$，

$\therefore HG=DG$.

而 $D'H=DH$，

$\therefore D'G=3DG=\frac{27}{4}$.

$\therefore D'$ 的坐标为 $\left(1,\frac{27}{4}\right)$.

(3) 如图答 12 所示，过点 A、B 分别作 x 轴的垂线，这两条垂线与直线 l 总是有交点的，即 2 个点 M.

以 AB 为直径的 $\odot G$ 如果与直线 l 相交，那么就有 2 个点 M；如果圆与直线 l 相切，就只有 1 个点 M 了. 连接 GM，那么 $GM\perp l$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EGM$ 中，$GM=3$，$GE=5$，

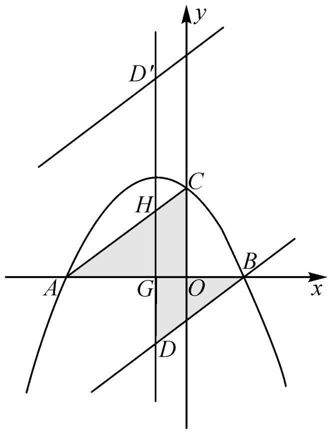
$\therefore EM=4$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EM_1A$ 中，$AE=8$，$\tan\angle M_1EA=\frac{M_1A}{AE}=\frac{3}{4}$，

∴$M_1A=6$.

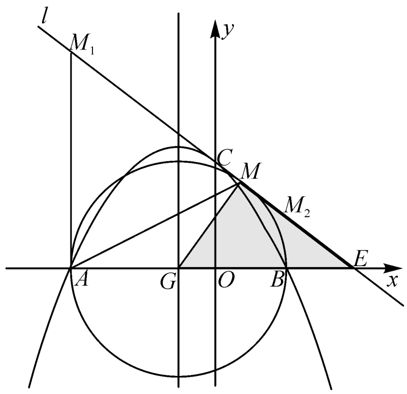
∴点 M_1 的坐标为$(-4,6)$，

过 M_1、E 的直线 l 为 $y=-\frac{3}{4}x+3$.

根据对称性，直线 l 还可以是 $y=\frac{3}{4}x-3$.



图答 11



图答 12

【习题 10】分析：1. 在轴上出现了直角，我们一般会再做垂直，构成三垂直模型利用相似(或全等)解决，本题就是过 B 作垂直构成三垂直模型.

2. (3)中构造直角三角形方法一般是两垂直一圆，又 AC 是直角边，∴过 A 和 C 作垂线，算出与抛物线的交点，要注意检验是否为等腰就好了.

解：(1)过点 B 作 $BD\perp x$ 轴，垂足为 D，

∵$\angle BCD+\angle ACO=90^\circ$，$\angle ACO+\angle OAC=90^\circ$，

∴$\angle BCD=\angle CAO$.

又∵$\angle BDC=\angle COA=90^\circ$，$CB=AC$，

∴$\triangle BDC\cong\triangle CAO=90^\circ$.

∴$BD=OC=1$，$CD=OA=2$.

∴点 B 的坐标为$(3,1)$.

(2)抛物线 $y=ax^2-ax-2$ 经过点 $B(3,1)$，则得 $1=9a-3a-2$，解得 $a=\frac{1}{2}$，

∴抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2$.

(3)假设存在点 P，使得$\triangle ACP$ 是直角三角形.

①若以 AC 为直角边，点 C 为直角顶点；则延长 BC 至点 P_1，使得 $P_1C=BC$，得到等腰直角三角形 ACP_1，过点 P_1 作 $P_1M\perp x$ 轴，如图答 13 所示.

∵$CP_1=BC$，$\angle MCP_1=\angle BCD$，$\angle P_1MC=\angle BDC=90^\circ$，

∴$\triangle MCP_1\cong\triangle BCD$.

$\therefore CM=CD=2, P_1M=BD=1$，可求得点 $P_1(-1,-1)$.

经检验点 $P_1(-1,-1)$在抛物线为$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2$上.

②若以 AC 为直角边，点 A 为直角顶点，则过点 A 作 $AP_2\perp CA$，且使得 $AP_2=AC$，

得到等腰直角三角形 ACP_2，过点 P_2 作 $P_2N\perp y$ 轴，

如图答 14 所示，同理可得$\triangle AP_2N\cong\triangle CAO$；

$\therefore NP_2=OA=2, AN=OC=1$，可求得点 $P_2(-2,1)$.

经检验点 $P_2(-2,1)$也在抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2$ 上；

③若以 AC 为直角边，点 A 为直角顶点，

则过点 A 作 $AP_3\perp CA$，且使得 $AP_3=AC$，

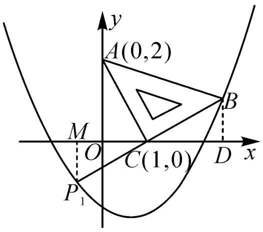
得到等腰直角三角形 ACP_3，过点 P_3 作 $P_3H\perp y$ 轴，

如图答 15 所示，同理可得$\triangle AP_3H\cong\triangle CAO$.

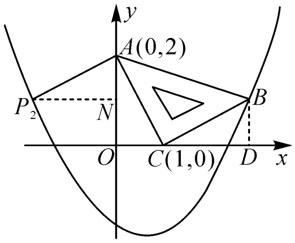
$\therefore HP_3=OA=2, AH=OC=1$，可求得点 $P_3(2,3)$.

经检验点 $P_3(2,3)$不抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2$ 上.

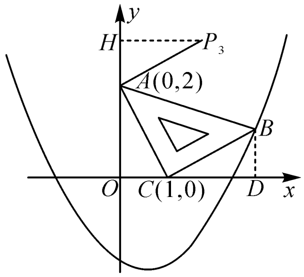
故符合条件的点有 $P_1(-1,-1)$，$P_2(-2,1)$两个.



图答 13



图答 14



图答 15

【习题 11】分析：1. 把$\triangle ACG$ 分割成以 GE 为公共底边的两个三角形，高的和等于 AD.

2. 用含有 t 的式子把图形中能够表示的线段和点的坐标都表示出来.

3. 构造以 C、Q、E、H 为顶点的平行四边形，再用邻边相等列方程验证菱形是否存在.

解：(1)$A(1,4)$.

$\because$抛物线的顶点为 A，

设抛物线的解析式为 $y=a(x-1)^2+4$，

代入点 $C(3,0)$，可得 $a=-1$.

$\therefore$抛物线的解析式为 $y=-(x-1)^2+4=-x^2+2x+3$.

(2)$\because PE\parallel BC$，

$\therefore \frac{AP}{PE}=\frac{AB}{BC}=2$. 因此 $PE=\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}t$.

$\therefore$点 E 的横坐标为 $1+\frac{1}{2}t$.

将 $x=1+\frac{1}{2}t$ 代入抛物线的解析式，$y=-(x-1)^2+4=4-\frac{1}{4}t^2$.

∴点 G 的纵坐标为 $4-\frac{1}{4}t^2$.

于是得到 $GE=\left(4-\frac{1}{4}t^2\right)-(4-t)=-\frac{1}{4}t^2+t$.

因此 $S_{\triangle ACG}=S_{\triangle AGE}+S_{\triangle CGE}=\frac{1}{2}GE(AF+DF)=-\frac{1}{4}t^2+t=-\frac{1}{4}(t-2)^2+1$.

∴当 $t=2$ 时，$\triangle ACG$ 面积的最大值为 1.

(3)$t=\frac{20}{13}$ 或 $t=20-8\sqrt{5}$.

【习题 12】分析：1.(2)中确定点 D 的坐标，会发现 DC 与 x 轴平行，与 BC 直线的夹角为 45°，从而 D 的对称点在 y 轴上.

2.(3)题 45°，最主要是能大概标注出 P 的位置，然后进行角度转换，注意 $\angle ABC$ 是 45°，推出 $\angle PBA$ 与 $\angle CBD$ 相等，再用三角函数即可.

解：(1)∵抛物线 $y=ax^2+bx-4a$ 经过 $A(-1,0)$，$C(0,4)$两点，

$$\therefore \begin{cases} a-b-4a=0, \\ -4a=4. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-1, \\ b=3. \end{cases}$$

∴抛物线的解析式为 $y=-x^2+3x+4$.

(2)如图答 16 所示，点 $D(m,m+1)$在抛物线上，

∴$m+1=-m^2+3m+4$，

即 $m^2-2m-3=0$，

∴$m=-1$ 或 $m=3$.

∵点 D 在第一象限，

∴点 D 的坐标为(3,4)

由(1)知 $OC=OB$，∴$\angle CBA=45°$.

设点 D 关于直线 BC 的对称点为点 E.

∵$C(0,4)$，

∴$CD\parallel AB$，且 $CD=3$，

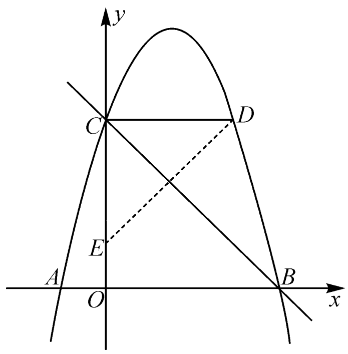
∴$\angle ECB=\angle DCB=45°$，

∴E 点在 y 轴上，且 $CE=CD=3$.

∴$OE=1$，

∴$E(0,1)$.

即点 D 关于直线 BC 对称的点的坐标为(0,1).



图答 16

(3)方法一：

如图答 17 所示，作 $PF\perp AB$ 于 F，$DE\perp BC$ 于 E.

由(1)有：$OB=OC=4$，∴$\angle OBC=45°$，

$\because \angle DBP=45°$，$\therefore \angle CBD=\angle PBA$.

$\because C(0,4)$，$D(3,4)$，

$\therefore CD // OB$ 且 $CD=3$.

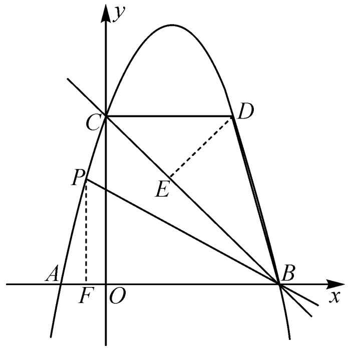
$\therefore DE=CE=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

$\because OB=OC=4$，

$\therefore BC=4\sqrt{2}$

$\therefore BE=BC-CE=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \tan\angle PBF=\tan\angle CBD=\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{3}{5}$.



图答 17

设 $PF=3t$，则 $BF=5t$，

$\therefore OF=5t-4$，

$\therefore P(-5t+4,3t)$

$\because P$ 点在抛物线上，

$\therefore 3t=-(-5t+4)^2+3(-5t+4)+4$，

$\therefore t=0$（舍去）或 $t=\dfrac{22}{25}$，

$\therefore P\left(-\dfrac{2}{5},\dfrac{66}{25}\right)$.

方法二：

如图答 18 所示，过点 D 作 BD 的垂线交直线 PB 于点 Q，过点 D 作 $DH\perp x$ 轴于 H. 过 Q 点作 $QG\perp DH$ 于 G.

$\because \angle PBD=45°$，$\therefore QD=DB$.

$\therefore \angle QDG+\angle BDH=90°$，

又 $\angle DQG+\angle QDG=90°$，

$\therefore \angle DQG=\angle BDH$.

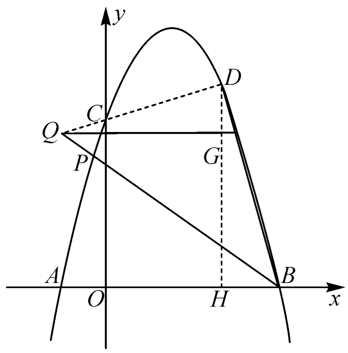
$\therefore \triangle QDG\cong\triangle DBH$，

$\therefore QG=DH=4$，$DG=BH=1$.

由(2)知 $D(3,4)$，

$\therefore Q(-1,3)$.

$\because B(4,0)$.



图答 18

$\therefore$ 直线 BP 的解析式为 $y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{12}{5}$.

又 P 在抛物线 $y=-x^2+3x+4$ 上，

联立得 $\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=0. \end{cases}$（舍）$\begin{cases} x_2=-\dfrac{2}{5} \\ y_2=\dfrac{66}{25} \end{cases}$.

∴点 P 的坐标为$\left(-\frac{2}{5},\frac{66}{25}\right)$.

【习题 13】解：(1)方法一：

∵直径 $AB\perp CD$，

∴$CO=\frac{1}{2}CD$，

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AC}$.

∵C 为$\overset{\frown}{AE}$的中点，

∴$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CE}$

∴$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CD}$.

∴$CD=AE$，

∴$CO=\frac{1}{2}CD=4$，

∴点 C 的坐标为$(0,4)$.

方法二：

连接 CM，交 AE 于点 N.

∵C 为$\overset{\frown}{AC}$的中点，M 为圆心，

∴$AN=\frac{1}{2}AE=4$，

$CM\perp AE$，

∴$\angle ANM=\angle COM=90°$.

在$\triangle ANM$ 和$\triangle COM$ 中，

$$\begin{cases}\angle CMO=\angle AMN,\\ \angle ANM=\angle COM=90°,\\ AM=CM,\end{cases}$$

∴$\triangle ANM\cong\triangle COM$，

∴$CO=AN=4$，

∴点 C 的坐标为$(0,4)$.

(2)如图答 19 所示，设半径 $AM=CM=r$，则 $OM=r-2$，

由 $OC^2+OM^2=MC^2$ 得：

$4^2+(r-2)^2=r^2$，

解得：$r=5$.

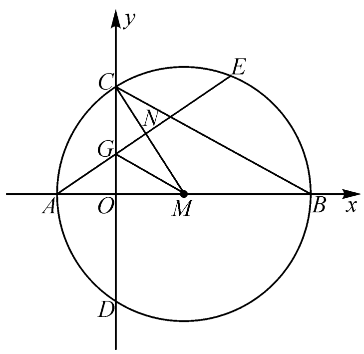
∵$\angle AOC=\angle ANM=90°$，$\angle EAM=\angle MAE$，

∴$\triangle AOG\backsim\triangle ANM$，

∴$\frac{OG}{MN}=\frac{AO}{AN}$.

∵$MN=OM=3$，

即$\frac{OG}{3}=\frac{2}{4}$，



图答 19

$\therefore OG=\frac{3}{2}$.

$\because \frac{OG}{OC}=\frac{1.5}{4}=\frac{3}{8}$,

$\frac{OM}{OB}=\frac{3}{8}$,

$\therefore \frac{OG}{OC}=\frac{OM}{OB}$.

$\because \angle BOC=\angle BOC$,

$\therefore \triangle GOM \backsim \triangle COB$,

$\therefore \angle GMO=\angle CBO$,

$\therefore MG /\!/ BC$.

(3)如图答 20 所示,连接 DM,则 $DM\perp PD$,$DO\perp PM$,

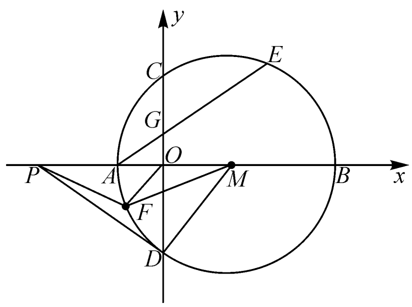
$\therefore \triangle MOD \backsim \triangle MDP$,$\triangle MOD \backsim \triangle DOP$,

$\therefore DM^2=MO\cdot MP$.

$DO^2=OM\cdot OP$.

即 $4^2=3\cdot OP$,

$\therefore OP=\frac{16}{3}$.



图答 20

当点 F 与点 A 重合时:$\frac{OF}{PF}=\frac{AO}{AP}=\frac{2}{\frac{16}{3}-2}=\frac{3}{5}$;

当点 F 与点 B 重合时:$\frac{OF}{PF}=\frac{OB}{PB}=\frac{8}{\frac{16}{3}+8}=\frac{3}{5}$;

当点 F 不与点 A、B 重合时:连接 OF、PF、MF.

$\because DM^2=MO\cdot MP$,

$\therefore FM^2=MO\cdot MP$,

$\therefore \frac{FM}{OM}=\frac{MP}{FM}$.

$\because \angle AMF=\angle FMA$,

$\therefore \triangle MFO \backsim \triangle MPF$,

$\therefore \frac{OF}{PF}=\frac{MO}{MF}=\frac{3}{5}$.

$\therefore$ 综上所述,$\frac{OF}{PF}$的比值不变,比值为$\frac{3}{5}$.

【习题 14】分析:1.(1)由图可知,$AB=2$,$CO=4$,OA 可用面积来求,所以可以直接求出 N 的纵坐标.②中的面积为梯形减直角三角形.

2.(2)重要是分清楚类,再利用三垂直模型来解决.

解:(1)①$AB=2$　$OA=\frac{8}{2}=4$,$OC=4$,$S_{梯形OABC}=12$

②当 $2<t<4$ 时，直角梯形 $OABC$ 被直线 l 扫过的面积＝直角梯形 $OABC$ 面积－直角三角形 DOE 面积.

$S=12-\frac{1}{2}(4-t)\times 2(4-t)=-t^2+8t-4.$

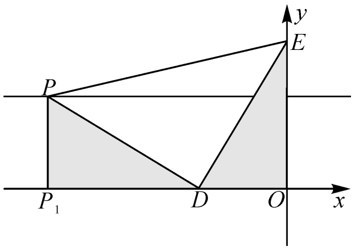
(2)存在　$P_1(-12,4)$，$P_2(-4,4)$，$P_3\left(-\frac{8}{3},4\right)$，$P_4(4,4)$，$P_5(8,4)$

解法一：

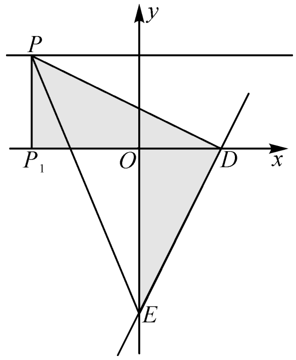
①以点 D 为直角顶点，作 $PP_1\perp x$ 轴.

∵在 Rt△ODE 中，$OE=2OD$，

设 $OD=b$，$OE=2b$. Rt△ODE≌Rt△P_1PD.（如图答 21、图答 22 所示阴影）



图答 21



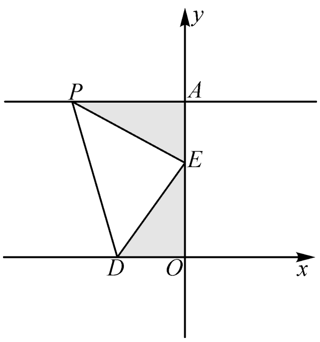
图答 22

∴$b=4$，$2b=8$，在上面两图中分别可得到 P 点的坐标为 $P(-12,4)$、$P(-4,4)$.

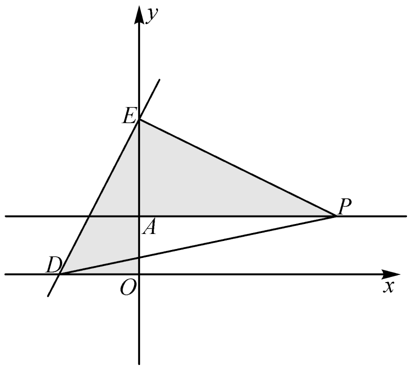
E 点在 O 点与 A 点之间不可能；

②以点 E 为直角顶点，

同理在图答 23、图答 24 两图中分别可得 P 点的坐标为 $P\left(-\frac{8}{3},4\right)$、$P(8,4)$，$E$ 点在 O 点下方不可能.



图答 23



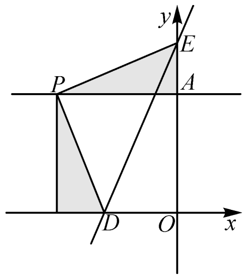
图答 24

③以点 P 为直角顶点.

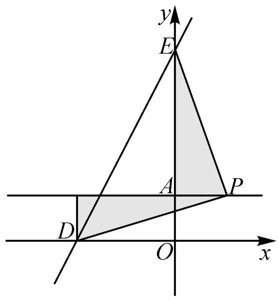
同理在图答 25、图答 26 中分别可得 P 点的坐标为 $P(-4,4)$（与①情形二重合舍去）、$P(4,4)$，E

点在 A 点下方不可能. 综上可得 P 点的坐标共 5 个解，

分别为 $P_1(-12,4)$、$P_2(-4,4)$、$P_3\left(-\frac{8}{3},4\right)$、$P_4(8,4)$、$P_5(4,4)$.



图答 25



图答 26

下面提供参考解法二：

按直角进行分类讨论(分三类)：

①第一类：

图答 25、图答 26 所示图中 $\angle P$ 为直角：设直线 DE：$y=2x+2b$.

此时 $D(-b,0)$，$E(0,2b)$的中点坐标为 $\left(-\frac{b}{2},b\right)$，

直线 DE 的中垂线方程：$y-b=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{2}\right)$，

令 $y=4$ 得 $P(\frac{3b}{2}-8,4)$.

由已知可得$\sqrt{2}PE=DE$

即$\sqrt{2}\times\sqrt{\left(\frac{3}{2}b-8\right)^2+(4-2b)^2}=\sqrt{b^2+4b^2}$，

化简得 $3b^2-32b+64=0$ 解得

$b_1=8$，$b_2=\frac{8}{3}$将之代入 $P\left(\frac{3b}{2}-8,4\right)$，$\therefore P_1=(4,4)$、$P_2(-4,4)$；

②第二类：

图答 23、图答 24 所示图中 $\angle E$ 为直角：设直线 DE：$y=2x+2b$.

$D(-b,0)$，$E(0,2b)$，

直线 PE 的方程：$y=-\frac{1}{2}x+2b$，

令 $y=4$ 得 $P(4b-8,4)$.

由已知可得 $PE=DE$，

即 $\sqrt{(4b-8)^2+(4-2b)^2}=\sqrt{b^2+4b^2}$，

化简得 $b^2=(2b-8)^2$ 解之得：$b_1=4$，$b_2=\frac{4}{3}$.

将之代入 $P(4b-8,4)$

$\therefore P_3=(8,4)$、$P_4\left(-\frac{8}{3},4\right)$

③第三类：

图答 21、图答 22 所示图中$\angle D$为直角：设直线 DE：$y=2x+2b$，

此时 $D(-b,0)$，$E(0,2b)$，

直线 PD 的方：$y=-\frac{1}{2}(x+b)$，

令 $y=4$ 得 $P(-b-8,4)$.

由已知可得

$PD=DE$ 即 $\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{b^2+4b^2}$ 解得

$b_1=4$，$b_2=-4$，将之代入 $P(-b-8,4)$，$\therefore P_5=(-12,4)$.

$P_6(-4,4)$，($P_6(-4,4)$与 P_2 重合，舍去.)

综上可得 P 点的坐标共 5 个解，分别为 $P(-12,4)$、$P(-4,4)$、$P\left(-\frac{8}{3},4\right)$、$P(8,4)$、$P(4,4)$.

事实上，我们可以得到更一般的结论：

如果得出 $AB=a$、$OC=b$、$OA=h$，设 $k=\frac{b-a}{h}$，则 P 点的情形如下表所示：

直角分类情形	$k\neq1$	$k=1$
$\angle P$ 为直角	$P_1(h,h)$	$P_1(-h,h)$
	$P_2(-h,h)$	
$\angle E$ 为直角	$P_3\left(-\frac{hk}{1+k},h\right)$	$P_2\left(-\frac{h}{2},h\right)$
	$P_4\left(\frac{hk}{k-1},h\right)$	
$\angle D$ 为直角	$P_5(-h(k+1),h)$	$P_3(0,h)$
	$P_6(-h(k-1),h)$	$P_4(-2h,h)$

【习题 15】分析：(2)这题平移抛物线时，抛物线的右半轴过 C 以后，左半轴在过 C 点以前，总会只有一个交点，当平移过 C 道相切之前都是两个交点，故分这两种情况.

解：(1)抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 经过 $A(-3,0)$，$B(-1,0)$两点，

$\therefore 9a-3b+3=0$ 且 $a-b+3=0$，

解得 $a=1$，$b=4$.

$\therefore$抛物线的解析式为 $y=x^2+4x+3$.

(2)由(1)配方得 $y=(x+2)^2-1$，

$\therefore$抛物线的顶点 $M(-2,1)$，

$\therefore$直线 OD 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x$.

于是设平移的抛物线的顶点坐标为$(h,\frac{1}{2}h)$，

∴平移的抛物线解析式为 $y=(x-h)^2+\frac{1}{2}h$.

①当抛物线经过点 C 时,∵$C(0,9)$,∴$h^2+\frac{1}{2}h=9$,

解得 $h=\frac{-1\pm\sqrt{145}}{4}$.

∴当 $\frac{-1-\sqrt{145}}{4}\leqslant h<\frac{-1+\sqrt{145}}{4}$ 时,平移的抛物线与射线 CD 只有一个公共点.

②当抛物线与直线 CD 只有一个公共点时,

由方程组 $y=(x-h)^2+\frac{1}{2}h$,$y=-2x+9$.

得 $x^2+(-2h+2)x+h^2+\frac{1}{2}h-9=0$,

∴$\Delta=(-2h+2)^2-4(h^2+\frac{1}{2}h-9)=0$,

解得 $h=4$.

此时抛物线 $y=(x-4)^2+2$ 与射线 CD 唯一的公共点为(3,3),符合题意.

综上:平移的抛物线与射线 CD 只有一个公共点时,顶点横坐标的值或取值范围是 $h=4$ 或 $\frac{-1-\sqrt{145}}{4}\leqslant h<\frac{-1+\sqrt{145}}{4}$.

【习题 16】解:(1)∵A,B 两点的坐标分别是 $A(10,0)$ 和 $B(8,2\sqrt{3})$,

∴$\tan\angle OAB=\frac{2\sqrt{3}}{10-8}=\sqrt{3}$,

∴$\angle OAB=60°$.

当点 A' 在线段 AB 上时,∵$\angle OAB=60°$,$TA=TA'$,

∴$\triangle A'TA$ 是等边三角形,且 $TP\perp TA'$,

∴$TP=(10-t)\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}(10-t)$,$A'P=AP=\frac{1}{2}AT=\frac{1}{2}(10-t)$,

∴$S=S_{\triangle A'TP}=\frac{1}{2}A'P\cdot TP=\frac{\sqrt{3}}{8}(10-t)^2$,

当 A' 与 B 重合时,$AT=AB=\frac{2\sqrt{3}}{\sin60°}=4$,

∴此时 $6\leqslant t\leqslant10$.

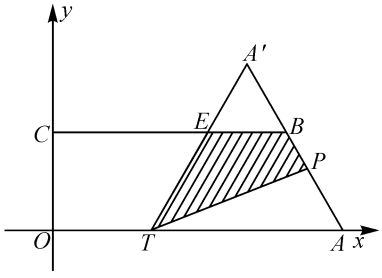
(2)当点 A' 在线段 AB 的延长线,且点 P 在线段 AB(不与 B 重合)上时,纸片重叠部分的图形是四边形(如图答 27 所示,其中 E 是 TA' 与 CB 的交点),

当点 P 与 B 重合时,$AT=2AB=8$,点 T 的坐标是(2,0),

又由(1)中求得当 A' 与 B 重合时,T 的坐标是(6,0),

∴当纸片重叠部分的图形是四边形时,$2<t<6$.

(3)S存在最大值.



图答 27

当 $6\leqslant t\leqslant 10$ 时，$S=\frac{\sqrt{3}}{8}(10-t)^2$，

在对称轴 $t=10$ 的左边，S 的值随着 t 的增大而减小，

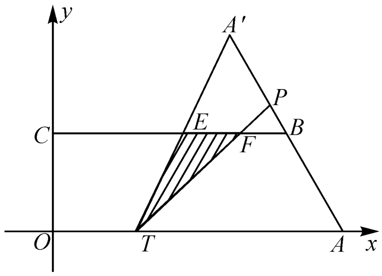
∴当 $t=6$ 时，S 的值最大是 $2\sqrt{3}$.

当 $2\leqslant t\leqslant 6$ 时，由图答 27 所示，重叠部分的面积 $S=S_{\triangle A'TP}-S_{\triangle A'EB}$.

∵$\triangle A'EB$ 的高是 $A'B\sin60°$，

∴$S=\frac{\sqrt{3}}{8}(10-t)^2-\frac{1}{2}(10-t-4)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{8}(-t^2+45+28)=-\frac{\sqrt{3}}{8}(t-2)^2+4\sqrt{3}$



图答 28

当 $t=2$ 时，S 的值最大是 $4\sqrt{3}$；

当 $0<t<2$，即当点 A' 和点 P 都在线段 AB 的延长线是(如图答 28 所示，其中 E 是 TA' 与 CB 的交点，F 是 TP 与 CB 的交点)，

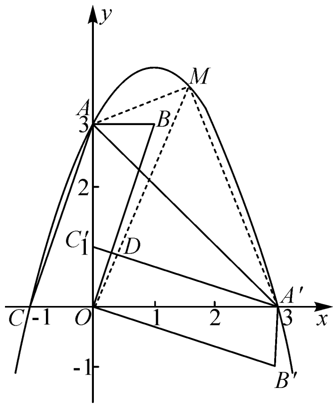
∵$\angle EFT=\angle FTP=\angle ETF$，四边形 $ETAB$ 是等腰形，

∴$EF=ET=AB=4$，

∴$S=\frac{1}{2}EF\cdot OC=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

综上所述，S 的最大值是 $4\sqrt{3}$，此时 t 的值是 $0<t\leqslant 2$.

【习题 17】解：(1)如图答 29 所示，∵▱$A'B'OC'$ 由▱$ABOC$ 旋转得到，且点 A 的坐标为(0,3)，



图答 29

∴点 A' 的坐标为(3,0).

∴抛物线过点 $C(-1,0)$，$A(0,3)$，$A'(3,0)$. 设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，可得 $\begin{cases}a-b+c=0,\\c=3,\\9a+3b+c=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2,\\c=3.\end{cases}$

∴过点 C,A,A' 的抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2)∵$AB/\!/CO$，

∴$\angle OAB=\angle AOC=90°$.

∴$OB=\sqrt{OA^2+AB^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

又$\angle OC'D=\angle OCA=\angle B$，

$\angle C'OD=\angle BOA$.

$\therefore \triangle C'OD \backsim \triangle BOA$.

又 $OC'=OC=1$.

$\therefore \dfrac{\triangle C'OD \text{ 的周长}}{\triangle BOA \text{ 的周长}}=\dfrac{OC'}{OB}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

又$\triangle ABO$的周长为 $4+\sqrt{10}$，

$\therefore \triangle C'OD$ 的周长为$\dfrac{4+\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=1+\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

(3)方法一：

连接 OM，设 M 点的坐标为(m,n)，

$\because$点 M 在抛物线上，

$\therefore n=-m^2+2m+3$，

$\therefore S_{\triangle AMA'}=S_{\triangle AMO}+S_{\triangle OMA'}-S_{\triangle AOA'}$

$=\dfrac{1}{2}OA\cdot m+\dfrac{1}{2}OA'\cdot n-\dfrac{1}{2}OA\cdot OA'$

$=\dfrac{3}{2}(m+n)-\dfrac{9}{2}=\dfrac{3}{2}(m+n-3)$

$=-\dfrac{3}{2}(m^2-3m)=-\dfrac{3}{2}(m-\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{27}{8}$.

$\because 0<m<3$

$\therefore$当 $m=\dfrac{3}{2}$时，$n=\dfrac{15}{4}$.

$\triangle AMA'$的面积有最大值$\dfrac{27}{8}$.

$\therefore$当点 M 的坐标为$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{4}\right)$时，

$\triangle AMA'$的面积有最大值，且最大值为$\dfrac{27}{8}$.

方法二：

设直线 AA'的解析式为 $y=kx+l$，

$\because$点 A，A'的坐标分别为$(0,3)$，$(3,0)$，

$\therefore \begin{cases} l=3, \\ 3k+l=0. \end{cases}$ 解得$\begin{cases} k=-1, \\ l=3. \end{cases}$

$\therefore y=-x+3$

如图答 30 所示，将直线 AA'向右平移，当直线与抛物线只有一个交点 M 时与 y 轴交于点 P，此时 $S_{\triangle AMA'}$最大，设平移后的直线的解析式为：$y=-x+h$，

则有：$\begin{cases} y=-x^2+2x+3, \\ y=-x+h. \end{cases}$

得 $x^2-3x+(-3+h)=0$，

令 $\Delta=9-4(-3+h)=0$，得 $h=\dfrac{21}{4}$.

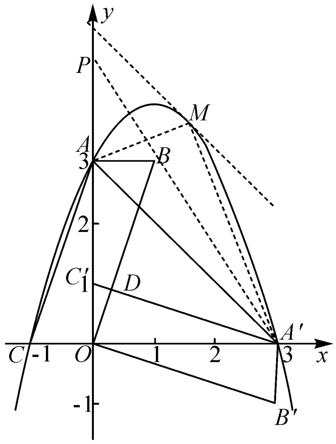
$\therefore\begin{cases}y=-x^2+2x+3,\\ y=-x+\dfrac{21}{4}.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2},\\ y=\dfrac{15}{4}.\end{cases}$

$\therefore$点 M 坐标为$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{4}\right)$,点 P 的坐标为$\left(0,\dfrac{21}{4}\right)$.

$\because MP\parallel AA'$,$\therefore\triangle MAA'$与$\triangle PAA'$同底等高,它们面积相等.

故 $S_{\triangle AMA'}=S_{\triangle PAA'}=S_{\triangle POA'}-S_{\triangle AOA'}=\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{21}{4}-\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{27}{8}$.



图答 30

$\therefore$当点 M 的坐标为$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{4}\right)$时,$\triangle AMA'$的面积有最大值,且最大值为$\dfrac{27}{8}$.

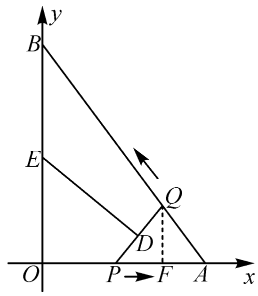
【习题 18】解:(1)在 Rt$\triangle AOB$ 中,$OA=3$,$AB=5$,由勾股定理得 $OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=4$.

$\therefore A(3,0)$,$B(0,4)$.

设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$.

$\therefore\begin{cases}3k+b=0,\\ b=4.\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-\dfrac{4}{3},\\ B=4.\end{cases}$

$\therefore$直线 AB 的解析式为 $y=-\dfrac{4}{3}x+4$.



图答 31

(2)如图答 31 所示,过点 Q 作 $QF\perp AO$ 于点 F.

$\because AQ=OP=t$,

$\therefore AP=3-t$.

由$\triangle AQF\backsim\triangle ABO$,得$\dfrac{QF}{BO}=\dfrac{AQ}{AB}$.

$\therefore\dfrac{QF}{4}=\dfrac{t}{5}$.

$\therefore QF=\dfrac{4}{5}t$.

$\therefore S=\dfrac{1}{2}(3-t)\cdot\dfrac{4}{5}t$,

$\therefore S=-\dfrac{2}{5}t^2+\dfrac{6}{5}t$.

(3)四边形 $QBED$ 能成为直角梯形.

①如图答 32 所示,当 $DE/\!/QB$ 时,

$\because DE\perp PQ$,

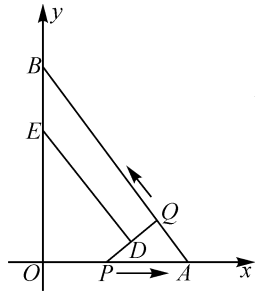
$\therefore PQ\perp QB$,四边形 $QBED$ 是直角梯形.

此时 $\angle AQP=90°$.

由 $\triangle APQ\backsim\triangle ABO$,得 $\dfrac{AQ}{AO}=\dfrac{AP}{AB}$.

$\therefore \dfrac{t}{3}=\dfrac{3-t}{5}$.

解得 $t=\dfrac{9}{8}$.



图答 32

②如图答 33 所示,当 $PQ/\!/BO$ 时,

$\because DE\perp PQ$,

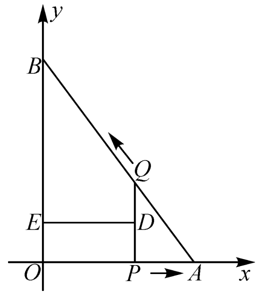
$\therefore DE\perp BO$,四边形 $QBED$ 是直角梯形.

此时 $\angle APQ=90°$.

由 $\triangle AQP\backsim\triangle ABO$,得 $\dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{AP}{AO}$.

即 $\dfrac{t}{5}=\dfrac{3-t}{3}$.

解得 $t=\dfrac{15}{8}$.



图答 33

(4)$t=\dfrac{5}{2}$ 或 $t=\dfrac{45}{14}$.